مثلثات

روبرت کامبل

پرویز شهریاری

کتابهای سیمرغ

۲۵

روبرت کامبل
ROBERT CAMPBELL

۲۵

مثلثات

TRIGONOMETR

ترجمهٔ پرویز شهریاری

مجموعهٔ کتابهای علمی، تاریخی و فلسفی

کامیل، روبرت

مثلثات

ترجمهٔ پرویز شهریاری
چاپ اول: ۱۳۴۴
چاپ دوم: ۲۵۳۶
چاپ: چاپخانهٔ رامین، تهران

فهرست

پیشگفتار

واژه مثلثات «Trigonometrie» به معنای «اندازه‌گیری مثلث» است. اساساً موضوع این علم‌عبارتست ازارزیابی ضلعها وزاویه‌های‌یک‌مثلث، ودرحالت عمومی‌تر، ارزیابی‌اجزاء یك شکل غیر مشخص هندسی.

مثلثات معمولی دربارهٔ شکلهای مسطحه بحث می‌کند، اگرچه باکمك آن بتوان اجزاء بعضی از شکلهای فضائی راهم معین‌کرد (ارزیابی اجزاء شکلهای فضائی موضوع مثلثات پیچیده‌تری است که معمولاً «مثلثات کروی» نامیده می‌شود): مسالهٔ‌اندازه‌گیری زاویه‌هاوضلعهای مثلث‌ازمدتها قبل،هندسه‌دانهارا وادارکردکه به‌هر زاویه‌عددهایی نسبت بدهندکه‌بتوان به‌کمك آنها زاویه را مشخص و خاصیتهای آنرا مطالعه‌کرد. به‌کمك این عددها، که به‌غلط و به‌علت وارد نبودن به‌مطلب «خطوط مثلثاتی» زاویه نامیده می‌شوند، می‌توان به سادگی مساله‌های مربوط به‌اندازه‌های شکلهای مسطحه را حل کرد، ولی، همانطورکه اغلب در ریاضی پیش می‌آید، این وسیله‌که به‌خاطرهدف محدودی به‌وجود آمد، تبدیل به‌ابزار پرارزشی در دست ریاضیدانان شد وبرای حل بسیاری از مساله‌های‌دیگر مورد استفاده قرار گرفت. امروز هم مثلثات را بدین ترتیب یاد می‌گیرند و به‌همین جهت موضوع قسمت اول این کتاب

عبارتست از: تعریف وخاصیتهای سینوس، کسینوس وتانژانت یك زاویه، یعنی مثلثات به‌طورکلی.

قسمت دوم اختصاص به مطالعهٔ مثلثات به‌معنای اخص آن یعنی حل مثلث ونتیجه‌های آن دارد.

ما فرض‌کرده‌ایم‌که خواننده با نتیجه‌های اساسی‌هندسهٔ مسطحه (حالتهای‌تساوی‌مثلثها، دایره، تشابه،قضیهٔ‌فیثاغورث، چندضلعیهای منتظم)وهمچنین‌بامفهومهای‌مقدماتی‌جبر (جمله، چندجمله‌ای، معادله‌های درجه اول، درجه دوم، دو مجذوری ولگاریتم) آشنائی دارد.

در این‌کتاب، ابتدا از یادآوری نظریهٔ مقدماتی تصویر آغاز می‌کنیم ودر آنجا قبل از همه‌کسینوس را به‌عنوان عامل تصویر معرفی می‌کنیم. ما مطالعه زاویه‌ها را از بردارها(که به‌وسیلهٔ سینوس و کسینوس مشخص می‌شوند) و هر دورا از زاویهٔ قائمه(که‌به‌وسیله تانژانت‌مشخص می‌شود) جدامی‌کنیم، وبه همین مناسبت‌است‌که درچهار فصل اول خاصیتهای‌سینوس وکسینوس را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

برای اینکه باکاربردهای مثلثات آشنا شویم، نمونه‌های بسیار زیادی را می‌توان ذکر کرد. ولی ما تنها به مساحی و نجوم، که علوم نزدیك به ریاضی هستند، اکتفا می‌کنیم. زمینه‌های دیگر مربوط به‌محاسبه‌های مثلثاتی بسیار زیاد است وخیلی بی‌معنی خواهد بود، اگر بخواهیم درچند صفحه‌دربارهٔ آنها صحبت کنیم.

۱

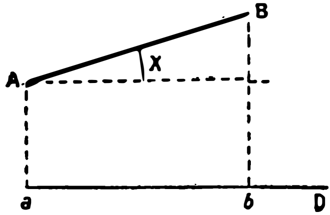
مفهومهای بنیانی

بردار. تصویر. کسینوس

۱. تصویر. مفهوم کسینوس.

در هندسهٔ مسطحه، تصویر نقطهٔ A برخط D عبارتست از پـای عمودی‌که از A برD فـرود آمده است. تصویـر یك شکل عبارتست از مجموعهٔ تصویرهای تمام نقطه‌های آن.

ساده‌ترین شکلها، پاره خطاست و تصویر پاره خطی مثل AB بر خط D، پاره خط دیگری‌است مثل ab.



شکل ۱

دوپاره خط AB وab درحالت عمومی با هم برابر نیستند وبین آنها ab کوچکتر است. هرچه زاویهٔ حادهٔ x (زاویهٔ بین AB وD) به زاویهٔ قائمه نزدیکتر شود طول ab کـوچکتر می‌شود و هر چه زاویهٔ x کوچکتر شود طول ab به‌AB نزدیکتر می‌شود (شکل ۱).

رابطهٔ بین‌طول ab بازاویهٔ x ما را به‌این مطلب راهنمائی‌می‌کند که باید با در دست داشتن زاویهٔ x (زاویهٔ بین AB وD) درحالیکه‌پاره خط AB معلوم است، بتوانیم طول پاره‌خط ab را محاسبه کنیم. مثلا مقداری برای q وجود داردکه اگر آنرا درطول AB ضرب کنیم، طول

تصویر ab بدست آید. دراینصورت می‌توان نوشت:

$$ab = AB \times q \quad \text{یا} \quad \frac{ab}{AB} = q$$

به‌این ترتیب، q برابر با کسری است که مخرج آن برابر پاره‌خط AB وصورت آن طول تصویر ab است.

این کسر همیشه از ۱ کوچکتر است (زیرا مخرج آن بزرگتر از صورت آن می‌باشد) ومقدار آن بستگی به‌زاویهٔ x دارد. در حقیقت این کسر تابعی‌است از x: $q = q(x)$. مقدار q راکسینوس‌زاویهٔ x می‌نامند و به $\cos x$ نشان می‌دهند، بنابراین، $\cos x$ عبارتست از نسبت ab برAB ویا به‌طور عددی، خارج‌قسمت ab برAB.

$$q(x) = \cos x = \frac{ab}{AB}$$

اگر زاویهٔ x برابر صفر باشد، $ab = AB$ و کسر q مساوی ۱ می‌شود، پس: $\cos 0 = 1$ و اگر زاویهٔ x برابر قائمه باشد، q برابر صفر می‌شود، زیرا دراینصورت ab به صورت یك نقطه در خواهد آمد، پس:
$\cos$ (زاویهٔ قائمه) $= 0$

به‌همان ترتیب که زاویهٔ حاده x اززاویهٔ صفر تازاویهٔ قائمه‌ترقی می‌کند،کسینوس آن تنزل می‌کند. این‌مقادیر، درجه به‌درجه (یا دقیقه به‌دقیقه) درجدولهایی تنظیم ودر دسترس همگان گذاشته شده است[1].

این، مفهوم ابتدایی کسینوس است که ازمفهوم تصویر گرفته شده

---

۱. فرض را بر این گرفته‌ایم که خواننده ازنظریهٔ اندازه‌گیری زاویه‌ها، آگاهی دارد.

است و آنرا به‌وسیلهٔ عملیتر و دقیقتری تبدیل می‌کند.

۲. توجیه[۱] خطها و صفحه‌ها

۱. خط راست D را به‌عنوان یك محور درنظرمی‌گیریم، یعنی روی این خط جهتی برای حرکت معین می‌کنیم (موافقت شده است که همیشه این جهت را ازچپ به‌راست درنظر بگیرند). پاره‌خطی مثل ab راکه از چپ به‌راست خوانده می‌شود، «مثبت» گویند و با علامت + مشخص می‌کنند، پاره‌خطهایی را که درجهت عکس باشند «منفی» گویند و با علامت − نشان می‌دهند. ضمناً محوررا تقسیم‌بندی هم کرده‌اند، ولی این تقسیم‌بندی بیشتر شبیه به‌روشی است که در درجه‌بندی میزان‌الحراره به‌کارمی‌برند. بنابراین، سروکارمابا عددهای جبری است نه باعددهای حسابی. یعنی، هم قدرمطلق مقادیر وهم علامت آنها را درنظر می‌گیریم.

۲. برای پاره‌خط AB، یك بردار درنظر می‌گیریم. بردار، مفهومی هندسی است که نه‌تنها اندازهٔ پاره‌خط را معین‌می‌کند، بلکه ضمناً امتداد خطی راکه این پاره‌خط برآن‌واقع است وهمچنین، جهتی راکه پاره‌خط روی این امتداد دارد نیزمعین می‌کند. پاره خطهای AB و CD از نظر هندسهٔ مقدماتی برابرند زیرا طولهای برابردارند. ولی از نظر برداری، باهم برابرنیستند، زیرا دارای امتدادهای مختلفی هستند. ولی‌بردارهای AB وEF باهم برابر (وگاهی می‌گویند هم‌سنك‌اند) زیرا:

۱) امتداد آنها یکی‌است (امتدادهای آنها باهم موازی است).

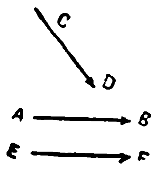
---

۱. توجیه را به جای Orientation گرفته‌ایم: خط توجیه شده، یعنی خطی‌که دارای جهت است.

۲) همجهت‌اند(از A به‌طرف B؛ A را مبدأ وB را انتهای‌بردار AB گویند وداریم $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$، همچنین $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{FE}$).

۳) طول آنها باهم برابر است (وگاهی می‌گویند کالبد (مدول) آنها یکی است). (شکل ۲).

بردارهایی که ملاحظه کردیم، بردارهای آزاد نام دارند، یعنی می‌توان جای آنهارا به‌دلخواه انتخاب کرد،به‌شرطی که عنصرهای‌تعریفی بردار را حفظ نماییم (اندازه، امتداد وجهت). بنابراین می‌توانیم مبدأ



شکل ۲

همهٔ‌بردارها رانقطهٔ‌انتخابی O بگیریم (برای مبدأ بنابه‌موقعیتی که‌وجود دارد، می‌توان نقطهٔ مناسبی درنظرگرفت، مثلا روی خط تصویر).

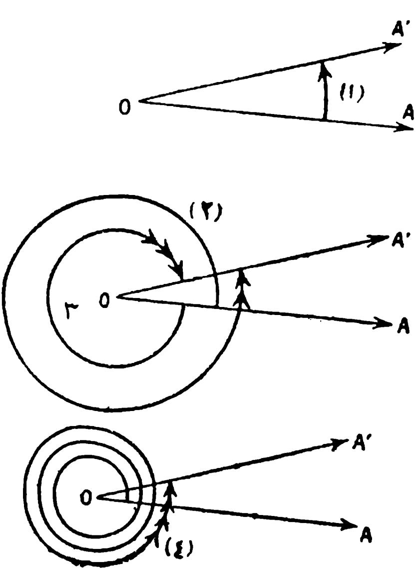
۳. وقتی که مطالعهٔ یك‌شکل روی صفحه انجام‌بگیرد، باید صفحه را جهت‌دار درنظرگرفت، زیرا اگرجهتی برای تمام‌صفحه درنظربگیریم، تمام جهت‌یابیهای قبل بیفایده خواهد بود. برداری بامبدأ ثابت O، روی صفحه‌فرض کنید، این‌بردار باجهتی که دارد شبیه به‌یك‌عقربهٔ‌ساعت است. شما می‌توانید این‌بردار را درجهت حرکت عقربه‌های ساعت و یا در جهت عکس، دور نقطهٔ O بچرخانید (روی صفحه تنها درهمین دو جهت می‌توان بردار را دوران داد). درریاضیات، حرکتی راکه درجهت عکس حرکت‌عقربه‌های ساعت‌است انتخاب کرده‌اندو آنرا «جهت‌مثلثاتی»

نام‌گذاشته‌اند. به‌این ترتیب زاویه‌ها هم‌مقدارهایی جبری پیدا می‌کنند. زاویه‌ای که درجهت مثلثاتی باشد ($\overrightarrow{OA}$و$\overrightarrow{OA'}$) مثبت وزاویه‌ای که در جهت عکس آن باشد، منفی خواهد بود (شکل ۳).

۴. روشن است که درصفحهٔ جهت‌دار، که ما می‌خواهیم خطهای راست جهت‌دار (محورها) وپاره‌خطهای جهت‌دار (بردارها) را در آن وارد کنیم، می‌توان خطها و پاره‌خطهای معمولی را هم‌جا داد.

دراینصورت باید راهی‌هم برای تشخیص زاویه‌ها معین کرد:

a) زاویهٔ جهت‌دار دو محور یا دوبردار عبارتست از قسمتی از صفحه، که باید محوریابردار اولی‌بپیماید تا برمحور یابرداردوم منطبق شود؛ مثل زاویهٔ $\overrightarrow{OA}$ با $\overrightarrow{OA'}$[می‌نویسند ($\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OA'}$)].



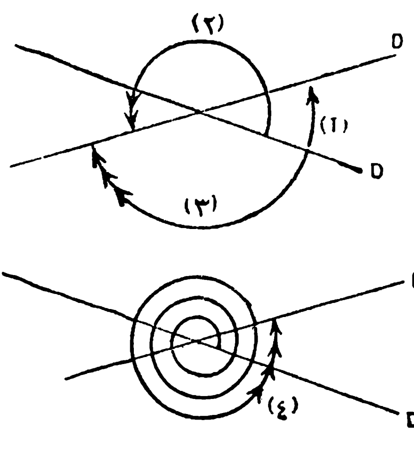
شکل ۳

برای جاروب‌کردن این زاویه باید $\overrightarrow{OA}$ را دور O دوران داد تا

بر $\overrightarrow{OA'}$ قرارگیرد، این دوران ممکن است درمسیر پیکان (۱) باشد (که دراینصورت زاویهٔ جاروب شده را، x می‌نامیم) (شکل ۳) یا در مسیر پیکان(۲) (که دراینصورت زاویه برابر x به‌اضافهٔ یك‌دورکامل است)و یا درمسیر پیکان(۳) (که دراینحال، زاویه برابر x منهای یك‌دورکامل است) ویا درمسیر پیکان(۴) (که دراینصورت، زاویه برابر x به‌اضافهٔ ۳ دورکامل می‌شود).

طبق این تعریف روشن می‌شودکه زاویهٔ x اختلافی بازاویهٔ (N دور +x) ندارد (که درآن N عدد درست دلخواهی است).

b) برای تعیین زاویهٔ بین‌دوخط راست می‌توان درمسیرپیکان(۱) حرکت کرد (که در اینصورت، آنرا x می‌نامیم) یا در مسیر پیکان(۲) (که زاویه برابر x+ $\frac{۱}{۲}$ دورکامل می‌شود) یا در مسیر پیکان(۳) (که زاویه برابر x منهای $\frac{۱}{۲}$ دورکامل می‌شود) ویا درمسیر پیکان(۴) (۶ نیم دور به‌اضافه x) (شکل ۴).



شکل ۴

وبنابراین، درحالت کلی، این‌زاویه خارج از($\frac{N}{2}$ دور$\pm$x)نخواهد بود. زاویه را می‌توان با درجه (هر درجه $\frac{1}{360}$ دور) یاگراد (هرگراد$\frac{1}{400}$ دور) یا رادیان اندازه‌گرفت. (رادیان اندازهٔ زاویه‌ای است‌که اگر رأس آن درمرکز دایره‌ای قرارگیرد، کمان روبروی به‌آن برابر باشعاع دایره شود). اندازهٔ زاویه‌ای کـه برابر یك دور کامل است، برابر 2π رادیان می‌شود. به این ترتیب، زاویهٔ قائمه $\frac{\pi}{2}$ رادیان وزاویهٔ‌نیم‌صفحه π رادیان خواهد بود. زاویهٔ‌بین‌دومحور یا دوبردار، تا 2π رادیان وزاویهٔ بین‌دو خط راست، تا π رادیان می‌تواند باشد[1]

درهندسه می‌توان زاویه‌ها را به اختیار، با درجه یا گراد اندازه گرفت. اندازه‌گیری بارادیان برای بقیهٔ شاخه‌های‌ریاضیات وبه‌خصوص درآنالیز، براندازه‌گیری با درجه و گراد، بـرتری‌بسیار دارد. بـه همین مناسبت است‌که ماهم دراندازه‌گیری زاویه‌ها از رادیان استفاده خواهیم کرد.

در صفحه‌ای که دارای جهت می‌باشد، تشخیص «زاویه‌هـای بین بردارها» (یاخطهای‌راست‌جهت‌دارکه باتقریب 2π رادیان معین‌می‌شوند) و «زاویه‌های بین‌خطها» (که جهت‌دار نیستند وبا تقریب π رادیان‌معین می‌شوند)، یك‌مطلب اساسی است وبه‌همین مناسبت است‌که این زاویه‌ها را به‌طور اساسی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ما ازمطالعهٔ زاویه بین بردارها شروع می‌کنیم‌که می‌توان آنها

---

۱. برای تبدیل رادیان به‌درجه یا برعکس کافی است توجه‌کنیم‌که‌هر ۱۸۰ درجه برابر با π رادیان است.

را به‌وسیلهٔ کسینوس (یاسینوس) تعبیر مثلثاتی کرد، ولی این بررسی به شرطی کامل می‌شود که مازاویه‌های بین خطهارا (که دارای جهت نیستند)، نیز مورد بررسی قراردهیم، که در آنجا به‌تعبیر مثلثاتی «تانژانت» توجه خواهیم کرد.

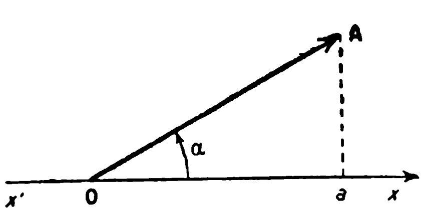
۳. تعریف دقیق کسینوس

روی یك صفحه، محور جهت‌دار $x'x$ و بردار آزاد $u=\overrightarrow{OA}$ را درنظر می‌گیریم، چون بردار $\overrightarrow{OA}$ آزاد است می‌توان مبدأ O راروی $x'x$ انتخاب کرد. تصویر قائم بردار $\overrightarrow{OA}$ یعنی $\overline{Oa}$ را روی $x'x$ انتخاب می‌کنیم، اگر α زاویه ($\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{Ox}$) باشد طبق تعریف داریم.

$$\cos\alpha=\frac{\overline{Oa}}{|\overrightarrow{OA}|}$$

(شکل ۵)

بنابراین، کسینوس زاویهٔ α عبارتست ازخارج قسمت جبری (یعنی دارای علامت جبری است) تصویر $\overline{Oa}$ برقدر مطلق بردار $\overrightarrow{OA}$ (بعد از این به‌جای قدر مطلق بردار $\overrightarrow{OA}$ می‌گوییم کالبد (مدول) $\overrightarrow{OA}$).



شکل ۵

$cos\alpha$ با $\overline{Oa}$ هم‌علامت است، وقتی که ($\overrightarrow{x'x}$ و $\overrightarrow{OA}$)$=\alpha$زاویهٔ حاده‌ای باشد (با تقریب ۲π رادیان) چه برای α مثبت وچه برای α منفی، $\overline{Oa}$ مثبت است واگر α زاویه‌ای منفرجه باشد (مثبت یا منفی) $cos\alpha$ مثل $\overline{Oa}$ منفی خواهد بود.

به‌این ترتیب:

- اگر زاویهٔ α (بین‌محورتصویروبردار $\overrightarrow{u}$)حاده‌باشد: $cos\alpha > ۰$.
- اگر زاویهٔ α منفرجه باشد: $cos\alpha < ۰$.
- اگر α قائمه باشد (با تقریب π رادیان): $cos\alpha = ۰$.
- اگر α مساوی‌صفر باشد (با تقریب ۲π رادیان)، $cos\alpha = +۱$.
- اگر α زاویهٔ‌نیم‌صفحه‌باشد(باتقریب ۲π رادیان) $cos\alpha = -۱$.

قدر مطلق (طول) $\overrightarrow{u}$ را با علامت $|\overrightarrow{u}|$ و زاویهٔ α را آوند (آرگومان) $\overrightarrow{u}$ (یا به‌طور خلاصه $\arg \overrightarrow{u}$)می‌گویند.

به‌این ترتیب، تصویر یك‌بردار بر یك محور، همیشه برابر است باحاصلضرب کالبد آن درکسینوس آوند آن.

۴. قضیهٔ شال

با توجه به‌جهت یك محور می‌توان برای سه‌نقطهٔ A وB وC واقع بر آن نوشت (شکل ۶):

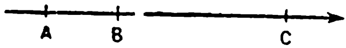
$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

یا:

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

یا:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$



شکل ۶

رابطهٔ اخیر را می‌توان‌برای تعدادغیرمشخص نقطه‌ها تعمیم داد:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+CD+\ldots+KL+LA=0$$

رابطهٔ شال را درمورد زاویه‌های جهت‌دار بین محورها وخطهاهم می‌توان به‌کار برد.

برای محورها:

$$(\overrightarrow{OB}\ \text{و}\ \overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OA}\ \text{و}\ \overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OA}\ \text{و}\ \overrightarrow{OB})\ \text{[با تقریب N دور]}$$

برای خطها: قضیهٔ شال برای زاویه‌های بین خطهای راست هم شبیه زاویه‌های‌بین بردارهاست، با این‌تفاوت‌که با تقریب $\frac{N}{2}$ دورمشخص می‌شود.

اگر زاویه‌ها را برحسب رادیان در نظر بگیریم، رابطهٔ شال در مورد آنها چنین می‌شود:

برای زاویه‌های بین محورها:

$$(\overrightarrow{OA}\ \text{و}\ \overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB}\ \text{و}\ \overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC}\ \text{و}\ \overrightarrow{OD})+\ldots+$$

$$+(\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OA})=2K\pi$$

وبرای زاویه‌های بین خطهای راست:

$$(OA\ \overset{\wedge}{\text{و}}\ OB)+(OB\ \overset{\wedge}{\text{و}}\ OC)+(OC\ \overset{\wedge}{\text{و}}\ OD)+\ldots+$$

$$+(\widehat{OL \text{ و } OA})=K\pi$$

۵. قضیهٔ تصویرها

یك رشته بردار متصل به‌هم $\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$ ،... و $\vec{u_n}$ رادرنظربگیرید(در شکل ۷ ، $n=3$ گرفته شده). بردار $\vec{S}$ را «مجموع برداری» (یاهندسی) این بردارها گوییم به‌شرطی که مبدأ آن مبدأ اولین بردار وانتهای آن انتهای آخرین بردار باشد.

به‌این ترتیب، اگر بردار $\vec{S}$ برابـر مجموع دو بـردار $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ باشد، به‌وسیلهٔ قطر متوازی‌الاضلاع که روی این دوبردار ساخته می‌شود مشخص خواهد شد ومی‌نویسند:

$$\vec{S}=\vec{u_1}+\vec{u_2}$$

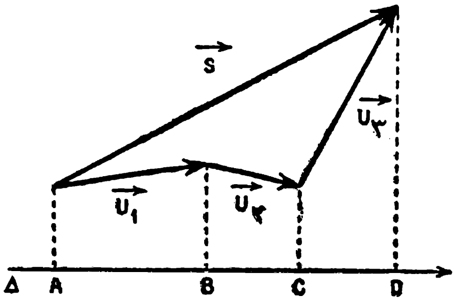
و به‌طورکلی وقتی‌که بخواهیم مجموع n بردار را نشان دهیم:

$$\vec{S}=\vec{u_1}+\vec{u_2}+\ldots+\vec{u_n}$$

این مجموع، به‌ترتیب قرارگرفتن اجزاء آن بستگی ندارد (یعنی تابع قانون جابه‌جـایی است). همچنین، اگر به‌جای چند بردار مجموع هندسی آنها را قراردهیم در حاصلجمع تغییری پیدا نمی‌شود (یعنی‌تابع قانون شرکت‌پذیری است). به‌این ترتیب:

$$\vec{u_1}+\vec{u_2}+\vec{u_3}+\vec{u_4}=\vec{u_1}+(\vec{u_2}+\vec{u_3})+\vec{u_4}$$

اگر شکلی راکه ازچند بـردار ومجموع آنها تشکیل شده است، روی یك‌محور غیرمشخص تصویـر کنیم، با استفاده ازرابطهٔ شال، مثلاً



شکل ۷

برای سه‌بردار، داریم:

تصویر $\vec{S}$ روی Δ = تصویر $\vec{u}_1$ روی Δ + تصویر $\vec{u}_2$ روی Δ +

+ تصویر $\vec{u}_3$ روی Δ

یعنی تصویر بردار مجموع هندسی، برابر است با مجموع جبری تصاویر بردارهای مفروض. اگر $|\vec{u}_1|$ و $|\vec{u}_2|$ و $|\vec{u}_3|$ معرف اندازه‌های «حسابی» طولهای بردارهای $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ و $\vec{u}_3$ باشد، این قضیه به ترتیب زیر در خواهد آمد:

$$|\vec{S}|\cos(\vec{\Delta}\,\text{و}\,\vec{S})=|\vec{u}_1|\cos(\vec{\Delta}\,\text{و}\,\vec{u}_1)+|\vec{u}_2|\cos(\vec{\Delta}\,\text{و}\,\vec{u}_2)+$$
$$+|\vec{u}_3|\cos(\vec{\Delta}\,\text{و}\,\vec{u}_3)$$

قضیهٔ تصویرها را برای n بردار $\vec{u}_1$، $\vec{u}_2$، ...و $\vec{u}_n$ به مجموع $\vec{S}$ هم می‌توان نوشت:

$$|\vec{S}|\cos(\arg\vec{S})^{1}= \qquad (1)$$

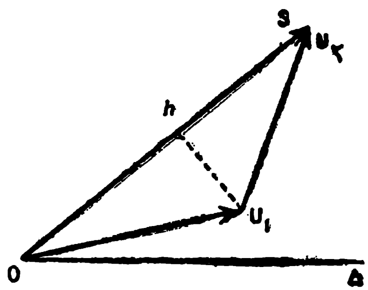
---

۱. $\arg\vec{s}$ یعنی آوند $\vec{s}$

$$= \left|\overrightarrow{u_1}\right| cos(\arg \overrightarrow{u_1}) + \left|\overrightarrow{u_2}\right| cos(\arg \overrightarrow{u_2}) + \ldots + \left|\overrightarrow{u_n}\right| cos(\arg \overrightarrow{u_n})$$

مورد استعمال . مجموع دو کسینوس: دوبردار $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ را با طولهای برابر که ما واحد فرض می‌کنیم در نظر می‌گیریم: $\left|\overrightarrow{u_1}\right| = \left|\overrightarrow{u_2}\right| = 1$. آوندهای این دوبردار را Θ_1 و Θ_2 فرض می‌کنیم، مجموع تصویرها به‌این ترتیب نوشته می‌شود:

$$cos\Theta_1 + cos\Theta_2 = \left|\overrightarrow{S}\right| cos(\overrightarrow{\Delta} \text{ و } \overrightarrow{S})$$



شکل ۸

از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع دو کسینوس برابر است با یك حاصلضرب که با محاسبهٔ کالبد و آوند $\overrightarrow{S}$ به‌سادگی می‌توان مقدار آنرا بدست آورد. در حقیقت بردارهای $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ و $\overrightarrow{S}$ تشکیل یك مثلث متساوی‌الساقین داده‌اند و بنابراین طبق رابطهٔ شال می‌توان نوشت:

$$(\overrightarrow{u_1} \text{ و } \overrightarrow{u_2}) = (\overrightarrow{\Delta} \text{ و } \overrightarrow{u_2}) - (\overrightarrow{\Delta} \text{ و } \overrightarrow{u_1}) = \Theta_2 - \Theta_1$$

واز آنجا:

$$(\overrightarrow{u_1} \text{ و } \overrightarrow{S}) = \frac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta_1)$$

اما

$$(\overrightarrow{\Delta} \text{ و } \overrightarrow{S}) = (\overrightarrow{\Delta} \text{ و } \overrightarrow{u_1}) + (\overrightarrow{u_1} \text{ و } \overrightarrow{S}) = \Theta_1 + \frac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)$$

از طرف دیگر

$$|\overrightarrow{OH}| = |\overrightarrow{u_1}| \cos(\overrightarrow{u_1} \text{ و } \overrightarrow{S}) = \cos\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2}$$

$\cos\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2}$ همیشه مثبت‌است، زیرا زاویهٔ مجاور به‌قاعدهٔ‌مثلث متساوی‌الساقین حاده است، بالاخره داریم:

$$|\overrightarrow{S}| \cos(\overrightarrow{\Delta} \text{ و } \overrightarrow{S}) = 2OH\cos(\overrightarrow{\Delta} \text{ و } \overrightarrow{S}) =$$

$$= 2\cos\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2}\cos\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}$$

به‌این ترتیب این خاصیت اساسی از تعریف سادهٔ کسینوس‌نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2 = 2\cos\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2}\cos\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}} \qquad (2)$$

یعنی مجموع‌کسینوسهای دو زاویه را می‌توان به‌صورت۲ برابرحاصلضرب کسینوسهای دو زاویهٔ دیگر نشان داد (که برابر نصف مجموع ونصف‌تفاضل زاویه‌های اولیه هستند).

برعکس،حاصلضرب‌دو کسینوس‌رامی‌توان‌به‌صورت نصف‌مجموع دو کسینوس نوشت:

$$\cos\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}\cos\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2} = \frac{1}{2}(\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2)$$

اگر رابطه‌های زیر را در نظر بگیریم:

$$u=\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2} \text{ و } v=\frac{\Theta_1-\Theta_2}{2}$$

رابطهٔ (۲) به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$2\cos u\cos v=\cos(u+v)+\cos(u-v)$$

این خاصیت اساسی جمع (یا ضرب) کسینوسها که مستقیماً از قضیهٔ تصویرها نتیجه می‌شود، برتمامی مثلثات، هندسهٔ تحلیلی، جبر و حساب انتگرال حکومت می‌کند.

توضیح. اگر مثلث متساوی‌الساقین‌نباشد (یعنی بردارهای $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ یك کالبد نداشته باشند)، قضیهٔ دیگری وجود داردکه بیان آن خیلی ساده نیست، زیرا محاسبهٔ طولها و زاویه‌ها بلافاصله بدست نمی‌آید.

۶. تعمیم؛ مجموع چندکسینوس

می‌توان این روش را برای چند بردار برابرکه دو به‌دو و متوالیاً زاویه‌های برابر باهم بسازند (خط شکستهٔ منتظمی تشکیل بدهند) تعمیم داد (شکل ۹).

$$(\vec{u_1} \text{ و } \vec{u_2})=(\vec{n_2} \text{ و } \vec{u_3})=\ldots=(\vec{u_{n-1}} \text{ و } \vec{u_n})=h$$

رأسهای این خط شکسته روی محیط یك دایره واقع خواهند بود که $\vec{S}$ وتری از آنست.

به‌ترتیب چنین نامگذاری می‌کنیم:

$\overrightarrow{OA_1}=u_1$ و $\overrightarrow{OA_2}=u_2$ و .... و $\overrightarrow{OA_n}=u_n$

$(\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{u_1})=\alpha$

$(\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{u_2})=(\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{u_1})+(\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2})=\alpha+h$

$(\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{u_3})=(\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{u_1})+(\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2})+(\overrightarrow{u_2}$ و $\overrightarrow{u_3})=\alpha+2h$

و در حالت کلی:

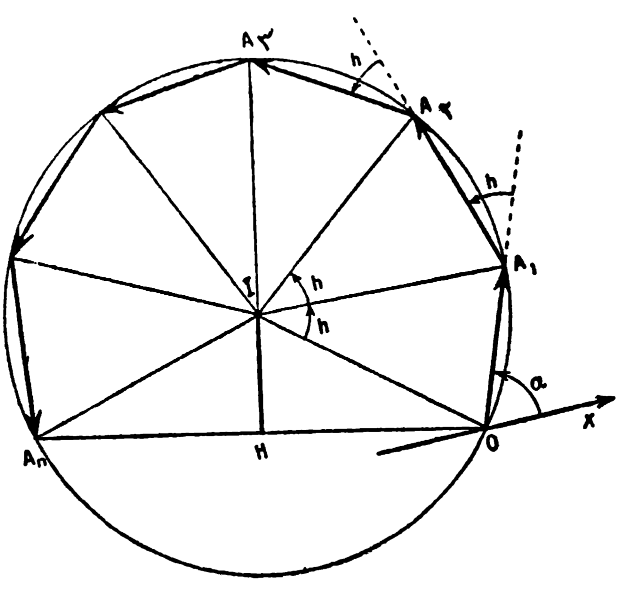
$(\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{u_n})=(\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{u_1})+(\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2})+\ldots+(\overrightarrow{u_{n-1}}$ و $\overrightarrow{u_n})=$

$=\alpha+(n-1)h$

اگر این مجموع بردارها را روی ox تصویر کنیم داریم:

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+h)+\cos(\alpha+2h)+\ldots+\cos[\alpha+(n-1)h] \qquad (4)$$

زاویه‌های ($\overrightarrow{OA_1}$ و $\overrightarrow{OA_2}$)، ($\overrightarrow{OA_2}$ و $\overrightarrow{OA_3}$)، ... و به‌طور کلی



شکل ۹

($\overrightarrow{OA_n}$ و $\overrightarrow{OA_{n-1}}$) زاویه‌های محاطی در دایره هستند و اندازهٔ هر یك برابر $\frac{h}{2}$ است. بالاخره داریم:

$$\arg\overrightarrow{S}=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2})+\ldots+$$

$$+(\overrightarrow{OA_{n-1}},\overrightarrow{OA_n})=\alpha+(n-1)\frac{h}{2}$$

اما دربارهٔ $\left|\overrightarrow{S}\right|$، در واقع $\left|\overrightarrow{S}\right|$ قـاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین OIA_n می‌باشد، که زاویهٔ رأس‌آن برابر است با: $(2\pi-nh)$ رادیان.

شعاع دایره را R فرض‌کنید، در مثلث متساوی‌الساقین OIA_n مثلاً داریم:

(شکل ۹ را ببینید) $OH=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{u_1}\right|=\frac{1}{2}=R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}\right)$،

و ازآنجا

$$R=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}\right)}$$

در همین مثلث متساوی‌الساقین OIA_n داریم:

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{s}\right|=R\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\pi-\frac{nh}{2})\right]$$

واگر به‌جای R مقدارش را قراردهیم، خواهیم داشت:

$$\left|\overrightarrow{S}\right|=\frac{\cos\frac{1}{2}(\pi-nh)}{\cos\frac{1}{2}(\pi-h)}$$

بنابراین، تصویر $\overrightarrow{S}$ خواهد شد:

$$\left|\overrightarrow{S}\right| \cos(Ox \text{ و } OA_n) = \frac{\cos\frac{\pi - nh}{۲}}{\cos\frac{\pi - h}{۲}} \cos\left[\alpha + \frac{(n-۱)h}{۲}\right] \qquad (۵)$$

این مقدار یك بیان از مجموع (۴) است که آنـرا به $C_۱(\alpha \text{و} h)$ نمایش می‌دهند.

می‌توان مجموع n کسینوس راکه قوسهای آنها تشکیل تصاعد عددی داده‌اند (یعنی هرقوس از اضافه‌کردن مقدار ثابت h به‌قوس‌قبلی بدست می‌آید) به عبارت بسیار ساده‌تری تبدیل کـرد (زیرا این حاصل به‌ازای هرمقدار دلخواه n تنها شامل ۳کسینوس است) وضمناًعلامتهای جمع هم ازبین رفته‌اند (چیزیکه ازنظرمحاسبه‌هـای عددی‌اهمیت زیادی دارد).

می‌بینیم که تنها با تعریف کسینوس وقضیهٔ تصویرها نتیجهٔ‌به‌این مهمی بدست آوردیم، که‌نتیجه‌های‌ریاضی آن، به‌نوبهٔ خود خیلی‌اهمیت دارد.

تبصره ۱ اگر در رابطهٔ(۱) فرض‌شود $\Theta_۱ = ۰$ و $\Theta_۲ = \Theta$ (یعنی روی شکل بردار $\overrightarrow{u_۱}$ را واقع برox در نظر بگیریم) داریم:

$$۱ + \cos\Theta = ۲\cos^۲\frac{\Theta}{۲} \qquad (۶)$$

واگر Θ را به‌۲Θ تبدیل‌کنیم،خواهیم داشت:

$$\cos ۲\Theta = ۲\cos^۲\Theta - ۱ \qquad (۶)'$$

رابطهٔ(۶) ازنظرکاربردآن‌اهمیت فراوان دارد. باکمك این‌رابطه، می‌توان مسألهٔ زیر را حل‌کرد: «بـا دردست داشتن کسینوس یك‌زاویه، کسینوس زاویهٔ دوبرابر آنرا پیداکنید».

وهمچنین برای مسألهٔ عکس آن:

«بادردست داشتن کسینوس یك زاویه، کسینوس نصف آن زاویه را پیدا کنید».

ازاین رابطه، این نتیجه هم بدست می‌آید که مجذور یك کسینوس را می‌توان به‌صورت یك تابع خطی از کسینوس زاویهٔ دوبرابر آن بیان کرد. این خصوصیت هم در تمام رشته‌های آنالیز نتیجه‌های نامحدودی به‌بار می‌آورد. اکنون مسألهٔ مشابه دیگری را طرح می کنیم؛ عبارت زیر را به‌صورت ساده‌تری درآورید:

$$C_۲(\alpha و h] = cos^۲\alpha + cos^۲(\alpha + h) + cos^۲(\alpha + ۲h) + + \ldots + cos^۲[\alpha + (n - ۱)h]$$

کسینوسهایی که به‌صورت مجذور کامل هستند، نمی‌توانند به‌وسیلهٔ قضیهٔ تصویرها بیان شوند، ولی بااستفاده ازرابطهٔ (۶) می‌توان جمله‌های عبارت قبل را به‌طریق زیرنوشت:

$$C_۲(\alpha و h) = \frac{۱}{۲}(۱ + cos ۲\alpha) + \frac{۱}{۲}[\,۱ + cos ۲(\alpha + h)\,] + \ldots + + cos^۲(\alpha + (n - ۱)h]$$

که پس از ساده‌کردن چنین می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}\left\{n + cos ۲\alpha + cos(۲\alpha + ۲h) + \ldots + cos[۲\alpha + ۲(n - ۱)h]\right\}$$

و از اینجا، به‌همان مجموع محاسبه شدهٔ قبلی می‌رسیم که درآن α به ۲α و h به $۲h$ تبدیل شده است. بنابراین خواهیم داشت:

$$C_۲(\alpha و h) = \frac{۱}{۲}[\,n + C_۱(۲\alpha و ۲h)\,] \qquad (۸)$$

تبصره ۲. اگر در شکل (۸) مثلث $Ou_۱u_۲$ را متساوی‌الاضلاع

فرض کنیم ($\left|\overrightarrow{S_1}\right|=\left|\overrightarrow{u_1}\right|=\left|\overrightarrow{u_2}\right|=1$ و $h=\frac{2\pi}{3}$)قضیهٔ تصویرها به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0 \qquad (9)$$

که به‌ازای هر مقدار دلخواه α درست است. این رابطه تعبیر هندسی جالبی دارد. G را مرکز یك مثلث متساوی‌الاضلاع ABC فرض کنید. این نقطه، مرکز ثقل شکلی است که از سه‌رأس مثلث تشکیل شده‌است (به‌شرطی که شکل را متجانس فرض کنیم). ازطرف دیگر، مرکز ثقل G چنان است که داریم:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$$

و ازتصویر این تساوی روی یك خط راست غیرمشخص تساوی(۹) بدست خواهد آمد.

۲

تعریف سینوس

وارابطه‌های اساسی

۱. تعریف سینوس

زاویهٔ قائمه (که اندازهٔ آن برحسب رادیان برابر $\frac{\pi}{۲}$ است) در هندسه اهمیت زیادی دارد و به‌همین مناسبت برای سهولت‌کار، قرارداد گذاشته‌اند:

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x \qquad (۱)$$

($\sin x$ خلاصهٔ «سینوس x» می‌باشد).

ازنظرهندسی، سینوس عبارتست ازتصویر قائم روی محور oy که عمود بر ox در نظرگرفته شده باشد.

$$\overline{OP}=|\overrightarrow{u}|\cos(\overrightarrow{ox} \text{ و } \overrightarrow{u})=|\overrightarrow{u}|\cos\alpha$$

$$\overline{PQ}=|\overrightarrow{u}|\sin\alpha$$ (شکل ۱۰)

بنابرقضیهٔ فیثاغورث (از هندسهٔ مقدماتی) داریم:

$$\overline{OQ}^۲=\overline{OP}^۲+\overline{PQ}^۲$$

$$u=(u\cos\alpha)^۲+(u\sin\alpha)^۲$$

و یا

$$\boxed{\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha=۱} \qquad (۲)$$

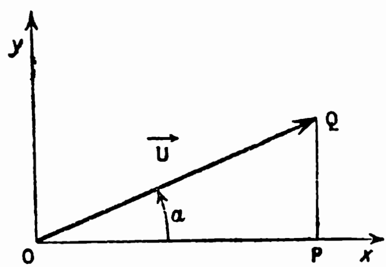
اتحاد (۲) یکی ازاتحادهای کاملاً اساسی مثلثات است وداریم:

$$\sin\frac{\pi}{۲}=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲}\right)=\cos ۰=۱ \text{ و}$$

$$\sin ۰=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-۰\right)=\cos\frac{\pi}{۲}=۰$$

سینوس یك زاویه، همزمان با زاویهٔ تصویر کوچك می‌شود. و روشن است که اگر یك بردار قائم را روی‌یك محور افقی تصویر کنند، طول تصویر برابر صفر می‌شود.

با توجه به‌این مفهوم، می‌توان بعضی از رابطه‌های قبلی (و مثلاً رابطه‌های (۵) و(۸) بخش اول) را به‌صورت ساده‌تری نوشت.



شکل ۱۵

به‌خصوص می‌توانیم رابطه‌هایی شبیه آنچه که برای‌کسینوسها ذکرکردیم، برای سینوسها بنویسیم. مثلاً مجموع:

$$S_۱(\alpha, h)=\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\ldots+\sin[\alpha+(n-۱)h]$$

ازاینجا بدست می‌آیدکه محیط شکل(۹) را روی محوری که بامحور این شکل زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ می‌سازد تصویرکنیم. $|\vec{S}|$ تغییر نمی‌کند، زاویه‌های تصویر بردارها به متممهای خود تبدیل می‌شوند. به‌این ترتیب چنین خواهیم داشت:

$$S_{۱}(\alpha \text{ و } h)=\frac{\sin\frac{nh}{۲}}{\sin\frac{h}{۲}}\sin[\alpha+(n-۱)\frac{h}{۲}] \qquad (۳)$$

همچنین رابطهٔ(۹) از بخش قبل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})+\sin(\alpha+\frac{۴\pi}{۳})=۰ \qquad (۴)$$

این رابطه هم مفهوم هندسی ساده‌ای دارد:

رابطه نشان می‌دهد که مجموع فاصله‌های جهت‌دار سه‌رأس هر مثلث متساوی‌الاضلاع از خط راست غیر مشخصی که از مرکز مثلث می‌گذرد برابر صفر است.

از نظر تاریخی، مفهوم سینوس قبل از کسینوس پیدا شد و در حقیقت کسینوس، همانطور که از نام آن پیداست، به‌عنوان سینوس زاویهٔ متمم به‌وجود آمد. با وجود این، شاخه‌های دیگر ریاضیات و به‌خصوص قضیهٔ تصویرها و نتیجه‌های آن، از سینوس به‌نفع کسینوس خلع‌ید کرد، زیرا کسینوس به خاطر نقشی که در عملهای مربوط به تصویر دارد اساسیتر به‌نظر آمد.

۲. مؤلفه‌های یك بردار

اغلب لازم است که تصویرهای یك بردار را روی دومحور عمود برهم مورد بررسی قرار دهیم. این تصویرها که مقادیر جبری هستند،

مؤلفه‌های بردار $\vec{u}$ نامیده می‌شوند. مؤلفهٔ x روی‌محور ox (افقی) از برداری که کالبد آن $|\vec{u}|$ وآوند آن α است برابر است با: $x = u\cos\alpha$ و مؤلفهٔ y روی محور oy (محور قائم) برابر است با: $y = u\sin\alpha$. بر عکس، اگر x وy یعنی مؤلفه‌های یك‌بردار معلوم باشد، می‌توان کالبد u را بدست‌آورد:

$$u^2 = x^2 + y^2$$

وهمچنین برای محاسبهٔ آوند آن:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ و } \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

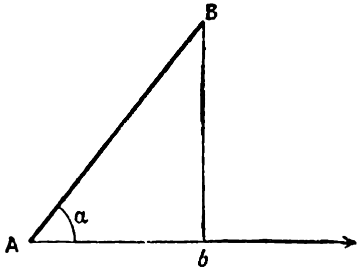
۳. نمایش سینوس وکسینوس به‌وسیلهٔ تصور هندسی دایرهٔ مثلثاتی

همانطورکه دیدیم، کسینوس وبنابراین سینوس «عمل‌کننده‌های تصویر» هستند، یعنی عددهایی هستندکه با در دست‌داشتن هر پاره خط می‌توان تصویر آنرا بدست آورد. این عددها ازنظر قدرمطلق، عددهایی کوچکتر از واحد هستند مثل:

$$\frac{۱}{۲} ; ۰/۳۴ ; \frac{۱}{۷} ; \frac{\sqrt{۲}}{۵} ; \sqrt{\frac{۱۴}{۲۳}} ; \frac{\pi^۲}{۱۱} ; \ldots.$$

ازاین عددها،که بستگی بـه زاویهٔ تصویر x دارند، می‌توان یك تصور هندسی داد. به‌این‌ترتیب‌که درمثلث قائم‌الزاویه ABb (که‌درآن ضلعهای Ab وbB دارای جهت هستند) نوشت:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\overline{Ab}}{AB} \\ \cos\alpha = \dfrac{\overline{bB}}{AB} \end{cases}$$ (شکل ۱۱)

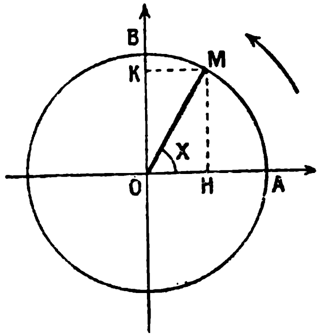


شکل ۱۱

درحقیقت، اگر AB را به‌طول واحدفرض کنیم، مقدارهای‌متناظر این عددهاهمان قطعه‌های $\overline{Ab}$ و $\overline{bB}$ خواهند بود، ولی باوجود این‌نباید آنها رایکی دانست، زیرا Ab یك طول جهت‌دار و بنابـراین یك عنصر هندسی است،درحالیکه کسینوس‌یك عدد، به‌معنی یك‌عنصر حسابی است. یکی دانستن کسینوس x باقطعهٔ Ab همانقدراشتباه است که‌بخواهیم‌مثلاً ریل راه‌آهنی‌را، که دوایستگاه رابه‌هم وصل‌کرده، باعدد ۱۴۰ که‌معرف فاصلهٔ دوایستگاه به‌کیلومتر است، یکی بدانیم.

حالاروشن شدکه درواقع،همهٔ اینها برای اینست‌که درك‌ساده‌تری از موضوع داشته باشیم. حالا می‌توانیم که‌کسینوس وسینوس را روی یك‌دایره (که به‌همین مناسبت دایرهٔ مثلثاتی نامیده می‌شود) نشان‌دهیم:

روی دایره‌ای باشعاع واحد، جهتی درنظر می‌گیریم (عکس جهت حرکت‌عقربه‌های‌ساعت)وقوسهای‌مثبت $\overset{\frown}{AM}$ را روی‌آن‌مشخص‌می‌کنیم.



شکل ۱۲

روی محور افقی که از O عبور کرده است (محور کسینوسها) وجهت آن به‌طرف راست معین شده است، OH تصویر شعاع OM را بدست می‌آوریم، دراینصورت داریم:

$$\overline{OH} = OM\cos x$$

که درآن $(\overrightarrow{OH}$ و $\overrightarrow{OM}) = x$ می‌باشد (شکل ۱۲). اما از آنجا که $OM = ۱$ است، داریم:

$$\boxed{\overline{OH} = \cos x}$$

به‌این ترتیب تصور $\cos x$ به‌وسیلهٔ قطعه $\overline{OH}$ داده می‌شود.

تصور سینوس هم به‌همین ترتیب به وسیلهٔ $\overline{OK}$ یعنی تصویر OM روی محور عمود بر محور قبلی (و در جهتی که به وسیلهٔ $\frac{\pi}{۲} = (\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OA})$ مشخص شده است) داده می‌شود:

$$\overline{OK} = \overline{HM} = sinX$$

از این تصور، بلافاصله نتیجه‌های زیر بدست می‌آید:

۱) $-1 < cosX$ و $sinX < +1$

۲) کسینوس زاویه‌های واقع بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ وهمچنین سینوس زاویه‌های بین صفر و ۲ قائمه، مثبت هستند.

۳) کسینوس زاویه‌های بین ۱قائمه و۳ قائمه، وهمچنین‌سینوس زاویه‌های بین ۲ قائمه و۴قائمه، منفی هستند.

این‌شکل نمایش، به‌سادگی وبلافاصله‌رابطه‌هایی راکه بین‌سینوس وکسینوس قوسهاقرینه، متمم، مکمل وغیره وجود دارد، بدست‌می‌دهد که ما در زیر به‌شرح آنها می‌پردازیم.

۴. رابطهٔ بین سینوس وکسینوس بعضی‌کمانها

A) کمانهای قرینه. به‌کمانهایی قرینه‌گویندکه اندازهٔ آنها از لحاظ قدرمطلق باهم برابر و از نظر علامت با هم مختلف باشند (با تقریب 2π).

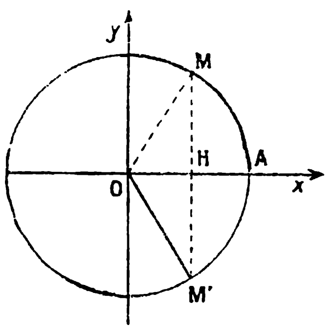
دو کمان‌قرینهٔ $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ درنظربگیزید، خطهای OM وOM′ نسبت به‌ox قرینهٔ یکدیگرند، درنتیجه خط MM′ برمحور ox عمود می‌شود وآنرا درH قطع می‌کند. سینوس کمان $\widehat{AM}$ به وسیلهٔ $\overline{HM}$ مشخص می‌شود (که جهتش به‌طرف بالاست) و سینوس کمان $\widehat{AM'}$ به وسیلهٔ HM′ (که جهتش به‌طرف پایین است).

برای‌هردو کمان، اندازهٔ کسینوس به‌وسیلهٔ $\overline{OH}$ تعیین می‌شود و به این ترتیب:

برای دوکمان قرینه، کسینوسها برابر و سینوسها قرینه‌اند (شکل ۱۳)

$$\cos(-X)=\cos X;\ \sin(-X)=-\sin X \qquad (۵)$$

B) کمانهای مکمل و کمانهای به‌تفاضل π (رادیان). ـ با روشی شبیه بالا می‌توان نتیجه‌گرفت:



شکل ۱۳

$$\sin(\pi-X)=\sin X \text{ و } \cos(\pi-X)=-\cos X \qquad (۶)$$

همچنین:

$$\sin(\pi+X)=-\sin X \text{ و } \cos(\pi+X)=-\cos X \qquad (۷)$$

C) کمانهای متمم و کمانهای به‌تفاضل $\frac{\pi}{۲}$ (رادیان). با روش مشابهی می‌توان ثابت‌کرد:

$$\sin(X+\frac{\pi}{۲})=\cos X \text{ و } \cos(X+\frac{\pi}{۲})=-\sin X \qquad (۸)$$

و :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-X)=\cos X \text{ و } \cos(\frac{\pi}{۲}-X)=\sin X \qquad (۹)$$

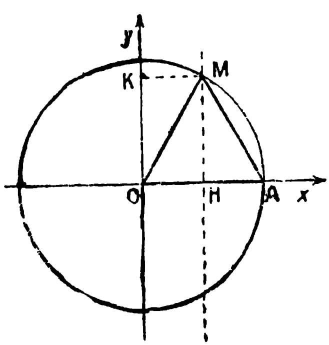
تبصره درجدولها، تنها سینوس و کسینوس زاویه‌های حاده‌داده شده است ووقتی‌که نیازبه‌محاسبهٔ سینوس یاکسینوس زاویهٔ غیرحاده‌ای باشد به‌کمك رابطه‌های (۵)، (۶)، (۷) و(۸) وهمچنین رابطه‌های‌روشن زیر، آنها را منجربه‌محاسبهٔ سینوس یاکسینوس یك‌زاویهٔ حاده‌می‌کنیم:

$$\cos(X+۲n\pi)=\cos X \text{ و } \sin(X+۲n\pi)=\sin X \qquad (۹)$$

۵. سینوس وکسینوس زاویه‌های مهم

A) روی دایرهٔ مثلثاتی به‌سادگی دیده می‌شودکه:

$$\begin{cases}\sin ۰ = ۰\\ \sin\pi = ۰\\ \sin\frac{\pi}{۲} = ۱\\ \sin\frac{۳\pi}{۲} = -۱\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\cos ۰ = ۱\\ \cos\pi = -۱\\ \cos\frac{\pi}{۲} = ۰\\ \cos\frac{۳\pi}{۲} = ۰\end{cases}$$



شکل ۱۴

B) وقتی‌که زاویه‌ای برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، برابر با زاویهٔ متمم خودش می‌شود وبنابراین، سینوس وکسینوس آن باهم برابر است، یعنی‌داریم: $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$؛ اما بـا توجه به‌اینکه $\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}=1$ وکسینوس یك زاویهٔ حاده مثبت است. خواهیم داشت:

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و اگر از نتیجه‌هایی که قبلا بدست آوردیم استفاده کنیم، به سادگی می‌توانیم سینوس وکسینوس زاویه‌های $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$را نیزمحاسبه‌کنیم.

زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$ (با تقریب 2π). انتهای‌کمان M (شکل۱۴)چنانست که مثلث OHM نیمی ازیك مثلث متساوی‌الاضلاع است (زاویهٔ O برابر ۶۰ درجه است)، پس

$$\begin{cases}\overline{OH}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{OA}}{2}=\frac{1}{2}\\ \overline{OK}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

واز اینجا نتیجه می‌شودکه

$$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

۳

رابطه‌های تبدیل

در بخش اول دیدیم که بااستفاده ازقضیۀتصویرها می‌توان مجموع دوکسینوس را به‌صورت حاصلضرب دوکسینوس دیگر نوشت وبرعکس حاصلضرب دوکسینوس هم به‌مجموعی از دوکسینوس دیگر قابل تبدیل است.

درآنجا، درحقیقت حالت خاصی بودکه توانستیم از راه‌غیرعادی یک‌رابطۀ مثلثاتی را نتیجه بگیریم.

حالا می‌خواهیم باراه‌عادی وکلی، طریقۀ تبدیل مجموع یاتفاضل کسینوسهاوسینوسها رابه‌حاصل‌ضرب و همچنین‌طریقۀ تبدیل حاصلضرب دوسینوس، دوکسینوس، یک‌سینوس ویک‌کسینوس وتوانهای سینوس و کسینوس را به‌حاصلجمع مورد بررسی قراردهیم.

۱. تبدیل مجموع (یا تفاضل) به‌حاصلضرب

a) قبلا دیدیم که برای تبدیل مجموع دوکسینوس داریم:

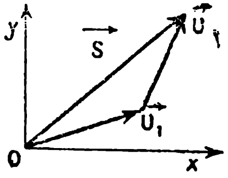
$$\cos\Theta_۱+\cos\Theta_۲=۲\cos\frac{\Theta_۱+\Theta_۲}{۲}\cos\frac{\Theta_۱-\Theta_۲}{۲} \qquad (۱)$$

برای اینکه رابطۀ تبدیل تفاضل دو کسینوس را بدست بیاوریم، کافی‌است که $\cos\Theta_۲$ را به $-\cos\Theta_۲$ یعنی $\Theta_۲$ را به‌$\pi+\Theta_۲$ تبدیل کنیم. در اینصورت رابطۀ(۱) چنین می‌شود:

$$\cos\Theta_1-\cos\Theta_2=2\cos\left(\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\Theta_1-\Theta_2}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

یا

$$\boxed{\cos\Theta_1-\cos\Theta_2=-2\sin\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2}\sin\frac{\Theta_1-\Theta_2}{2}} \qquad (2)$$



شکل ۱۵

می‌توان رابطه‌هایی شبیه رابطه‌های(۱) و(۲) برای سینوسها بدست آورد، برای این منظور، کافی است بردارهای $\vec{u}_1$ ، $\vec{u}_2$ و $\vec{S}$ را به جای ox روی oy تصویرکنیم، دراینصورت خواهیم داشت:

$$\sin\Theta_1+\sin\Theta_2=\left|\vec{S}\right|\sin(\text{oy و s})=$$

$$=2\cos\frac{\Theta_2-\Theta_1}{2}\times\sin\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2} \qquad (3)$$

وبرای محاسبهٔ تفاضل دوسینوس کافی است در دوطرف تساوی(۳)، Θ_2 را به $-\Theta_2$ تبدیل کنیم (زیرا $\sin\Theta$ همزمان با Θ تغییر علامت می‌دهد). بنابراین

$$\sin\Theta_1+\sin\Theta_2=2\cos\frac{\Theta_1-\Theta_2}{2}\sin\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2} \qquad (3)$$

$$\sin\Theta_1-\sin\Theta_2=2\cos\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2}\sin\frac{\Theta_1-\Theta_2}{2} \qquad (4)$$

همچنین می‌توانستیم بدون‌استفاده ازخاصیتهای تصویرها، وتنها باتبدیل سادهٔ Θ به $\frac{\pi}{2}-\Theta$ در رابطه‌های(۱)و(۲)، رابطه‌های(۳) و(۴) رابدست آوریم، زیرا باتبدیل Θ به $\frac{\pi}{2}-\Theta$، $\cos\Theta_1+\cos\Theta_2$ به $\sin\Theta_1+\sin\Theta_2$ تبدیل می‌شود وطرف‌دوم رابطه‌هم،چنین می‌شود.

$$2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\Theta_1+\frac{\pi}{2}-\Theta_2}{2}\times\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\Theta_1-\frac{\pi}{2}+\Theta_2}{2}$$

یعنی

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2}\right)\cos\frac{\Theta_2-\Theta_1}{2}$$

ویا بالاخره

$$\sin\Theta_1+\sin\Theta_2=2\sin\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2}\cos\frac{\Theta_2-\Theta_1}{2}$$

که همان رابطهٔ (۳) می‌باشد.

به‌این ترتیب رابطه‌های تبدیل مجموع به‌حاصلضرب بدست آمد. همهٔ آنها شبیه یکدیگرند وتنها جای سینوس وکسینوس درهریك‌از آنها با دیگری فرق‌دارد وبرای اینکه در موقع به خاطر آوردن این رابطه‌ها دچارتردید نشویم، کافی‌است‌به‌این نکته توجه‌کنیم که هر دوطرف‌تساوی باید به‌طور همزمـان کوچك شود وهمچنین، وقتی کمانی کوچك شود، سینوس آن به‌طور همزمان با آن‌کوچك وکسینوس آن بزرگ می‌شود. به‌این ترتیب، $\cos\Theta_1-\cos\Theta_2$ وقتی که $\Theta_1=\Theta_2$ و $\Theta_1=-\Theta_2$ باشد،

برابر صفر می‌شود وبنابراین، درطرف راست تساوی، هم مجموع و هم تفاضل کمانها زیرعلامت سینوس خواهند بود (زیرا اگر درطرف راست کسینوس باشد وقتی عبارت سمت‌چپ صفر می‌شود، عبارت سمت راست صفر نخواهد شد). یعنی تفاضل کسینوسها بـرابر است با حاصلضربی از سینوسها.

همچنین $sin\Theta_۱ - sin\Theta_۲$ برای $\Theta_۱ = \Theta_۲$ برابر صفر می‌شود ولی به‌ازای $\Theta_۱ = -\Theta_۲$ برابر صفر نمی‌شود و بنابـراین، در طرف راست، تفاضل زیرعلامت سینوس ومجموع زیر علامت کسینوس است.

خلاصهٔ بحث

(برای سادگی کار $\Theta_۱ = \Theta$ و $\Theta_۲ = \varphi$ درنظر می‌گیریم):

$$\begin{cases} cos\Theta + cos\varphi = ۲\,cos\dfrac{\Theta+\varphi}{۲}\,cos\dfrac{\Theta-\varphi}{۲} \\ cos\Theta - cos\varphi = -۲\,sin\dfrac{\Theta+\varphi}{۲}\,sin\dfrac{\Theta-\varphi}{۲} \\ sin\Theta + sin\varphi = ۲\,sin\dfrac{\Theta+\varphi}{۲}\,cos\dfrac{\Theta-\varphi}{۲} \\ sin\Theta - sin\varphi = ۲\,cos\dfrac{\Theta+\varphi}{۲}\,sin\dfrac{\Theta-\varphi}{۲} \end{cases}$$

۲. حالتهای خاص

اگردر رابطه‌های(۱) و(۲) $\Theta_۱ = ۰$ و $\Theta_۲ = \Theta$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 1-\cos\Theta = 2\sin^2\frac{\Theta}{2} & (5) \\ 1+\cos\Theta = 2\cos^2\frac{\Theta}{2} & (6) \end{cases}$$

اگر توجه کنیم که به‌ازای $\Theta=0$ طرف اول رابطهٔ(۵) برابر صفر وطرف اول رابطه(۶) برابر۲ می‌شود به‌سادگی می‌توانیم به‌خاطربسپاریم که کدامیك به $\sin^2\frac{\Theta}{2}$ و کدامیك به $\cos^2\frac{\Theta}{2}$ تبدیل می‌شوند.

این دو رابطه، همان قضیهٔ مقدماتی هندسه را بیان می‌کنند که بر طبق آن هرزاویهٔ محاطی بـرابر بانصف زاویهٔ مرکزی است که روبه‌روی همان کمان زاویهٔ محاطی قرارگرفته است.

اگر در رابطه‌های (۳) و(۴) هم $\Theta_1=0$ و $\Theta=\Theta_2$ فرض کنیم، رابطه‌های زیر را بدست خواهیم آورد:

$$\sin\Theta = 2\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2} \qquad (5)$$

$$\cos\Theta = 1-2\sin^2\frac{\Theta}{2} = 2\cos^2\frac{\Theta}{2}-1 \qquad (6)$$

که سینوس و کسینوس یك‌زاویه را بـرحسب سینوس و کسینوس زاویهٔ نصف بیان می‌کنند. رابطهٔ(۶) را دربخش اول هم‌بدست آوردیم (بخش اول ـ شمارهٔ ۶ـ رابطهٔ۶).

۳. محاسبهٔ $\sin\Theta_1+\cos\Theta_2$

مجموع $\sin\Theta_1+\cos\Theta_2$ را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\Theta_1\right)+\cos\Theta_2$$

وبنابراین می‌توان بنابر رابطهٔ (۱) آنرا بیان کرد. دراینصورت خواهیم داشت:

$$\sin\Theta_1+\cos\Theta_2=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Theta_1-\Theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2}\right)$$

که می‌توان در صورت لزوم آنرا به صورت حاصلضرب دو سینوس هم نوشت:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Theta_1-\Theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2}\right)$$

وهمچنین به‌صورت حاصلضرب دوکسینوس:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Theta_1-\Theta_2}{2}\right)$$

۴. مسالهٔ عکس

ما مجموع دوسینوس یادوکسینوس را به‌حاصلضرب تبدیل کردیم، آیا می‌توان حاصلضربهای سینوس و کسینوس را به حاصلجمع تبدیل کرد؟ در حقیقت باید رابطه‌های (۱) ، (۲)، (۳) و(۴) را ازجهت عکس خواند.

مثلاً برای اینکه عکس رابطهٔ زیر را پیداکنیم:

$$\cos\Theta_۱+\cos\Theta_۲=۲\cos\frac{\Theta_۱+\Theta_۲}{۲}\cos\frac{\Theta_۱-\Theta_۲}{۲}$$

کافی است فرض کنیم: $b=\frac{\Theta_۱-\Theta_۲}{۲}$ و $a=\frac{\Theta_۱+\Theta_۲}{۲}$،

که ازآنجا خواهیم داشت:

$$\Theta_۱=a+b \quad \text{و} \quad \Theta_۲=a-b$$

دراینصورت، رابطهٔ مفروض به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=-۲\sin a\sin b$$

و به‌این ترتیب، مسالهٔ تبدیل حاصلضرب به‌مجموع حل می‌شود

$$\cos a\cos b=\frac{۱}{۲}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right] \qquad (۹)$$

$$\sin a\sin b=\frac{۱}{۲}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right] \qquad (۱۰)$$

و امـا برای حاصلضرب $\cos a\cos b$، کافی است کـه از رابطهٔ $\sin\Theta_۱+\sin\Theta_۲$ شروع کنیم و یا در رابطهٔ $\cos a\cos b$ به جای b مقدار $\frac{\pi}{۲}-b$ را قرار دهیم که دراینصورت خواهیم داشت:

$$\cos a\sin b=\frac{۱}{۲}\left[\cos(a+\frac{\pi}{۲}-b)+\cos(a-\frac{\pi}{۲}+b)\right]$$

ویا:

$$\cos a\sin b=\frac{۱}{۲}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right] \qquad (۱۱)$$

تبدیل حاصلضرب بیش از دوعامل به مجموع

در بخش اول، باتوجه به‌قضیهٔ تصویرها دیدیم که تبدیل مجموعی از نوع $cos\Theta_۱+cos\Theta_۲+cos\Theta_۳$ بـه حاصلضرب ممکن است، اما در حالتیکه $\Theta_۱$ و $\Theta_۲$ و $\Theta_۳$ زاویه‌های غیرمشخصی باشند، نتیجه جالبی بدست نمی‌آیدوبه‌همین مناسبت رابطه‌های مربوط به‌تبدیل مجموع سه کسینوس (ویا سه سینوس) را مورد بررسی قرار ندادیم. ولی عکس مساله چنین نیست وتبدیل حاصلضرب سه کسینوس (یا سه‌سینوس) بدون واسطه و به‌کمك رابطه‌های اساسی وساده می‌تواند به‌مجموع تبدیل شود.

در این مورد کافی است که رابطهٔ (۹) یا (۱۰) را دوبار به‌کار بریم. به‌این ترتیب:

$$\cos a\cos b\cos c=\frac{۱}{۲}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]\cos c$$

یا:

$$\frac{۱}{۲}\cos(a+b)\cos c+\frac{۱}{۲}\cos(a-b)\cos c$$

یعنی:

$$\frac{۱}{۴}\Big[\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+$$

$$+\cos(a-b+c)+\cos(a-b-c)\Big] \qquad (۱۲)$$

همین‌روش را برای‌تبدیل حاصلضرب تعداد غیرمشخصی کسینوس نیز می‌توان به‌کار بـرد. یك حالت خاص درموردی است که کمانهای

برابر داشته باشیم:

$$a=b=c$$

در اینصورت رابطهٔ (۱۲) چنین می‌شود:

$$\cos^{۳}a=\frac{۱}{۴}[\cos ۳a+۳\cos a]$$

استدلال کلی دراین زمینه ثابت خواهد کرد که مقدار $\cos^{n}a$ همیشه به‌صورت مجموعی از کسینوس قوسهای a،۲a،۳a،....وna قابل بیان است که نتیجهٔ بسیارمهم‌وجالبی است (مثلاً درحساب انتگرال). به‌همین ترتیب می‌توان در مورد حاصلضرب تعداد غیر مشخصی سینوس و یا حاصلضرب تعداد غیر مشخصی سینوس در تعداد غیرمشخصی کسینوس استدلال کرد.

به‌این ترتیب به‌سادگی رابطه‌هایی‌مانند رابطهٔ زیر بدست‌می‌آید:

$$۸\sin^{۴}a=۳-۴\cos ۲a-\cos ۴a$$

ویا با واردکردن رابطهٔ

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})+\sin(\alpha+\frac{۴\pi}{۳})=۰$$

رابطهٔ کلاسیك زیر بدست‌می‌آید که بعداً ازآن استفاده خواهیم کرد (بخش ۸ شماره ۱):

$$\sin\alpha=۴\sin\frac{\alpha}{۳}\sin\frac{\alpha+\pi}{۳}\sin\frac{\alpha+۲\pi}{۳}$$

۵. مجموع کمانها

اگر رابطه‌های (۷) و (۸) را باهم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad (۱۳)$$

وازکم کردن آنها

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \qquad (۱۳)'$$

همچنین اگر دررابطهٔ(۱۱)، مقدارهای a وb را به‌هم تبدیل کنیم، می‌شود:

$$\cos b\sin a=\frac{۱}{۲}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right] \qquad (۱۴)$$

وسپس، ازجمع وتفریق دو رابطهٔ (۱۱) و (۱۴) خواهیم داشت:

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \qquad (۱۵)$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \qquad (۱۵)'$$

به‌کمك رابطه‌های (۱۳) و $'$(۱۳)، (۱۴) و $'$(۱۴) می‌توان مسالهٔ زیر را حل کرد:

سینوس وکسینوس دو کمان a وb معلوم است، سینوس وکسینوس مجموع (a+b) وتفاضل (a−b) را پیداکنید. این مساله به‌نام مسالهٔ «مجموع کمانها» مشهور شده است.

حالت مخصوص. مسالهٔ کمان دو برابر. کافی است در رابطه‌های قبلی a = b فرض کنیم تامسالهٔ زیررانتیجه بگیریم: سینوس وکسینوس کمانی مفروض است، سینوس وکسینوس کمان دوبرابر را پیداکنید.

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

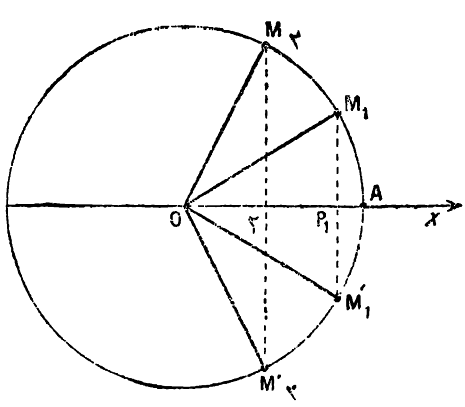
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

که در حقیقت همان رابطه‌های (۵) و (۶) هستند بااین تفاوت که Θ به $2a$ تبدیل شده است.

تبصره. $\cos 2a$ را می‌توان تنها با در دست داشتن $\cos a$ و یا $\sin a$ بدست آورد، در حالیکه این‌خصوصیت برای $\sin 2a$ وجود ندارد.

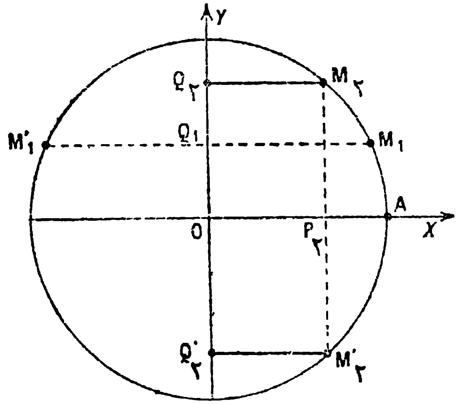
این مطلب را می‌توان به کمك دایرهٔ مثلثاتی هم به سادگی توضیح داد:

۱) کمان a به‌وسیلهٔ کسینوس آن مشخص شده است، این کمان قرینه‌ای نسبت به Ox دارد: $\widehat{AM_1}$ و $\widehat{AM_1'}$ هردودارای یك‌کسینوس $\overline{OP_1}$ هستند. همچنین کمانهای دوبرابر آنها یعنی $\widehat{AM_2}$ و $\widehat{AM'_2}$، همه دارای یك‌کسینوس $\overline{OP_2}$ هستند (که همان $\cos 2a$ است). ولی سینوس $\widehat{AM_2}$ و $\widehat{AM_2'}$ به‌وسیلهٔ این کسینوس تنها ازلحاظ قدر مطلق برابرند (شکل ۱۶).



شکل ۱۶

۲) کمان a به‌وسیلهٔ سینوس آن $\overline{OQ_۱}$ مشخص شده است. این کمان قرینه‌ای نسبت به Oy دارد که هر دو دارای یك سینوس هستند: $\widehat{AM_۱}$ و $\widehat{AM_۱}'$ (یعنی $\pi - \widehat{AM_۱}$). ولی دو برابر این کمان $\widehat{AM_۱}'$ قرینهٔ دو برابر $\widehat{AM_۱}$ نسبت به Ox می‌شود (زیرا $۲\widehat{AM_۱}' = ۲\pi - ۲\widehat{AM_۱}$ و روشن است که کمانهای $۲\widehat{AM_۱}$ و $-۲\widehat{AM_۱}$ نسبت به Ox قرینهٔ یکدیگرند) بنابراین، کسینوس آنها یکی و برابر $\overline{OP_۲}$ خواهد شد و سینوس آنها تنها با تقریب یك علامت شناخته می‌شود: $\overline{OQ_۲}$ یا $\overline{OQ_۲}'$ (شکل ۱۷).



شکل ۱۷

تعمیم. محاسبهٔ کسینوس مجموع چند کمان

$$\cos(a+b+c+\ldots)$$

با در دست‌داشتن سینوس و کسینوس کمانهای a،b،c،....

ابتدا حالت سه کمان را درنظر می‌گیریم. کافی است که مجموع $b+c$ را به‌عنوان یك کمان درنظر بگیریم وطبق حالت مجموع دوقوس عمل کنیم:

$$\cos[a+(b+c)]=\cos a\cos(b+c)-\sin a\sin(b+c)=$$
$$=\cos a[\cos b\cos c-\sin b\sin c]-$$
$$-\sin a[\sin b\cos c+\cos b\sin c]$$

و ازآنجا:

$$\cos(a+b+c)=\cos a\cos b\cos c-\cos a\sin b\sin c-$$
$$-\cos b\sin c\sin a-\cos c\sin a\sin b \qquad (۱۶)$$

همچنین می‌توان بدست آورد:

$$\sin(a+b+c)=\sin a\cos b\cos c+\sin b\cos a\cos c+$$
$$+\sin c\cos a\cos b-\sin a\sin b\sin c \qquad (۱۶)'$$

واز این رابطه‌ها هم می‌توان حاصل عبارتهای:

$\cos(a+b-c)$ و $\cos(a-b+c)$ و

را باتغییر علامت کمان مورد نظر در دوطرف تساوی بدست آورد.

همین روش را می‌توان برای محاسبهٔ کسینوس مجموع ۴، ۵،.. و n کمان به‌کار برد. منتهی رابطه‌هایی‌که بدست می‌آید طولانی است واز لحاظ نوشتن خسته‌کننده.

۶. مضرب کمانها

وقتی که همهٔ کمانهای a، b، c و ... برابر باشند $cos(a+b+c+...)$ به $cos\,na$ تبدیل می‌شود که در آن n تعداد کمانها درنظر گرفته شده است.

رابطه‌های مربوط به $n=۲$ را قبلاً ذکر کردیم و اگر $n=۳$ باشد، رابطه‌های (۱۶) و (۱۶)′ به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{cases} cos\,۳a=۴cos^{۳}a-۳cos\,a \\ sin\,۳a=۳sin\,a-۴sin^{۳}a \end{cases} \qquad (۱۷)$$

روی رابطه‌های اخیر توجه کنیم که در آنجا $cos\,۳a$ تنها برحسب $cos\,a$ معین شده است (همچنین $sin\,۳a$ برحسب $sin\,a$). همین وضع برای $cos\,۲a$ هم‌وجودداشت، درحقیقت وقتی که کسینوس کمانی مفروض‌باشد، خودکمان باتقریب یك‌علامت معین می‌شود (دو کمان متقارن نسبت به ox) وضرب این کمان درسه، این تقارن‌را حفظ می‌کند (وهمچنین کمان در هرعدد دلخواهی ضرب شود، تقارن نسبت‌به ox حفظ خواهد شد).

بنابراین، $cos\,na$ می‌تواند به‌وسیلهٔ یك چندجمله‌ای نسبت به $cos\,a$ بیان شود.

$$cos\,na=T_n(cos\,a) \qquad (۱۸)$$

چندجمله‌ای T_n چندجمله‌ای چبیشف Tchebycheff از درجهٔ n نامیده می‌شود. اگر $cos\,a=x$ باشد $cos\,na=T_n(x)$ می‌شود؛ چند جمله‌ایهای $T_n(x)$ اهمیت زیادی دارد وبه‌سادگی وبا شروع ازرابطهٔ (۱۰) محاسبه

می‌شوند. ما در زیر نخستین آنها را بیان می‌کنیم:

$T_0(x)=1;$ $\qquad cos\,0a=1$

$T_1(x)=x;$ $\qquad cos\,1a=cos\,a$

$T_2(x)=2x^2-1;$ $\qquad cos\,2a=2cos^2a-1$

$T_3(x)=4x^3-3x;$ $\qquad cos\,3a=4cos^3a-3cos\,a$

$T_4(x)=8x^4-8x^2+1;$ $\qquad cos\,4a=8cos^4a-8cos^2a+1$

$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x;$ $\qquad cos\,5a=16cos^5a-20cos^3a+5cos\,a$

وقتی که کمانی به‌وسیلهٔ سینوس داده شده باشد، خود کمان با تقریب یك‌قرینه نسبت به oy بدست می‌آید.

ضرب کمان، درعدد۳ این‌تقارن را حفظ می‌کند ودر حالت‌عمومی ضرب در هرعدد فرد. به‌این ترتیب وقتی‌که n فرد باشد داریم:

$$sin\,na=T_n'(sin\,a)$$

ولی، وقتی‌که n عددی زوج باشد، ضرب کمان درn تقارن نسبت به oy را به‌تقارن نسبت به ox تبدیل می‌کند ودر اینصورت $sin\,na$ باتقریب یك علامت نسبت به $sin\,a$ معین می‌شود، ترجیح‌داده می‌شودکه برای سهولت کار، درتمام حالتها $sin\,na$ تابعی از $cos\,a$ درنظرگرفته شود، دراینصورت به‌ازای هرمقدار n در $sin\,na$ همیشه‌عاملی از $sin\,a$ وجود خواهد داشت:

$$sin(n+1)a=sin\,a\times\left[\text{کثیرالجمله‌ای برحسب } cos\,a \text{ از درجهٔ } n\right] \qquad (19)$$

اگر مثل حالت قبل $cos\,a=x$ فرض شود خواهیم داشت:

$$sin(n+1)a=\sqrt{1-x^2}\,(\text{کثیرالجمله‌ای از } x \text{ با درجهٔ } n)=$$
$$=u_{n+1}(x)$$

تابع $u_n(x)$ را تابع نوع دوم چبیشف گویند (که‌مانخستین آنهارا در زیر خواهیم داد).

وقتی‌دوچندجمله‌ای‌متوالی T_n (ویاتابعهای u_n) راداشته‌باشیم، می‌توانیم تمام بقیه را بدست بیاوریم. رابطهٔ زیر که تبدیل یك مجموع به‌حاصل ضرب است:

$$\cos(n+1)a+\cos(n-1)a=2\cos a\cos na$$

وقتی‌که $\cos a=x$ باشد چنین می‌شود:

$$T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2xT_n(x)$$

و یا:

$$T_{n+1}-2xT_n+T_{n-1}=0 \qquad (20)$$

واین رابطه اجازه می‌دهد که تمام T_nها را با شروع از T_0وT_1 محاسبه کنیم.

همچنین می‌توان ثابت‌کرد:

$$u_{n+1}-2xu_n+u_{n-1}=0 \qquad (20)'$$

که ازآن به‌همان ترتیب T_n مقادیر u_n بدست می‌آید.

جدول نخستین تابعهای چبیشف (نوع دوم):

$u_0(x)=0;$ $\qquad \sin(0a)=0$

$u_1(x)=\sqrt{1-x_2};$ $\qquad \sin(1a)=\sin a$

$u_2(x)=\sqrt{1-x^2}(2x);$ $\qquad \sin 2a=2\sin a\cos a$

$u_3(x)=\sqrt{1-x^2}(4x^2-1);$ $\qquad \sin 3a=\sin a(4\cos^2 a-1)$

$u_4(x)=\sqrt{1-x^2}(8x^3-4x);$ $\qquad \sin 4a=4\sin a\cos a(2\cos^2 a-1)$

$u_5(x)=\sqrt{1-x^2}(16x^4-12x^2+1);$ $\qquad \sin 5a=\sin a(16\cos^4 a-12\cos^2 a+1)$

یادآوری می‌کنیم که در ستون دوم، چند جمله‌ایهای داخل پرانتز چند جمله‌ایهایی برحسب $sin^2 a$ هستند، ولی متغیرمتداول همان کسینوس است.

۷. تقسیم کمانها

حالا عکس مسالهٔ قبل را مطرح می‌کنیم، یعنی: کسینوس کمان a معلوم است، مطلوبست کسینوس کمان $\frac{a}{n}$. واین، مسالهٔ تقسیم کمانهاست. این مساله، هم‌ارز مسالهٔ زیراست: مقدار $cos na$ داده شده (مثلاً برابر b) $cos a$ را محاسبهٔ کنید. در اینصورت (طبق آنچه‌که قبلاً گفتیم): چند جمله‌ای $T_n(x)$ برابر با b می‌باشد، واز آنجا باید خود x را پیداکنیم، یا به‌عبارت دیگر بایدمعادلهٔ $T_n(x)=b$ را حل‌کنیم، که درآن $T_n(x)$ چندجمله‌ای چبیشف ازدرجهٔ nام می‌باشد.

وقتی‌که n غیرمشخص باشد، این‌مساله، یك مسالهٔ جبری خیلی مشکل است ومنجر به‌حل یك معادلـه از درجهٔ n می‌شود. در اینصورت نمی‌توان جوابهای آنرا به‌دقت حساب‌کرد ولی‌بعضی ازخاصیتهای آنرا می‌توان مورد بررسی قرارداد. مثلاً معادلهٔ $T_n=b$ نسبت به‌x ازدرجهٔ nام است وبدون تردید دارای n جواب است. درحقیقت عدد b برابر با کسینوس‌کمانی مانند a است وکمان a با تقریب $2k\pi$ معین است واز آنجا کمان $\frac{a}{n}$ با $\frac{2k\pi}{n}$ تقریب معین می‌شود، یعني اگر $x_1=cos\frac{a}{n}$ یکی از

ریشه‌های معادلهٔ $T_n=b$ باشد، تمام مقادیر $cos(\frac{a}{n}+\frac{۲k\pi}{n})$ (که در آنجا k عدد درست دلخواهی‌است) بایکدیگر متفاوت خواهند بود. یابه عبارت دیگر، انتهای کمانهای $\frac{a}{n}+\frac{۲k\pi}{n}$ روی‌دایرهٔمثلثاتی n نقطهٔ متمایز خواهند بود، که رأسهای یك n ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند. تصویر این n نقطه روی ox همان کسینوسهای کمانهای‌مورد نظراست‌وجوابهای معادلهٔ $T_n=b$ خواهند بود. یعنی تعداد جوابهای معادله برابر با n می‌باشد.

شبیه همین‌تحقیق را درموردمسالهٔ مربوط به‌سینوسها هم‌می‌توان انجام داد. درآنجاهم n جواب خواهیم داشت.

اکنون مسالهٔ تقسیم کمانها را در حالتهای $n=۲$ و $n=۳$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۸. تقسیم بر ۲

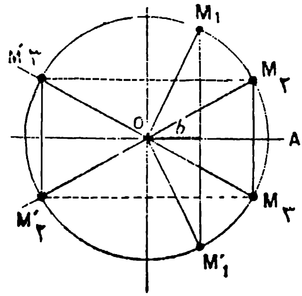
مساله. تابع متناوبی از کمان a مفروض است، تابعهای‌متناوب کمان $\frac{a}{۲}$ را پیدا کنید.

۱) a به‌وسیلهٔ کسینوس آن داده شده:

$$cos a=b \qquad (b<۱)$$

می‌توانیم برای‌استدلال‌ازشکل استفاده‌کنیم. α را زاویه‌ای‌فرض‌می‌کنیم که کسینوس آن برابرb باشدو ضمناً داشته باشیم: $\pi\geqslant\alpha\geqslant ۰$، بنابراین کمانهای a مقدارهای زیر را خواهد داشت:

$$\alpha+۲k\pi(\widehat{AM_۱}) \quad و \quad -\alpha+۲k\pi(\widehat{AM_۱'})$$



شکل ۱۸

ودر نتیجه کمانهای نصف، چنین خواهد بود:

$$+\frac{\alpha}{۲}+k\pi(\widehat{AM}_۲ و \widehat{AM'}_۲) و -\frac{\alpha}{۲}+k\pi(\widehat{AM}_۳ و \widehat{AM'}_۳)$$

وبه‌سادگی روشن می‌شود که سینوس وکسینوس آنها باتقریب یك‌علامت معین می‌شوند.

حالا، به‌کمك محاسبه، نتیجه را بدست می‌آوریم. از رابطه‌های

$$\cos a = ۲\cos^۲\frac{a}{۲} - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲\frac{a}{۲}$$

بدست می‌آوریم:

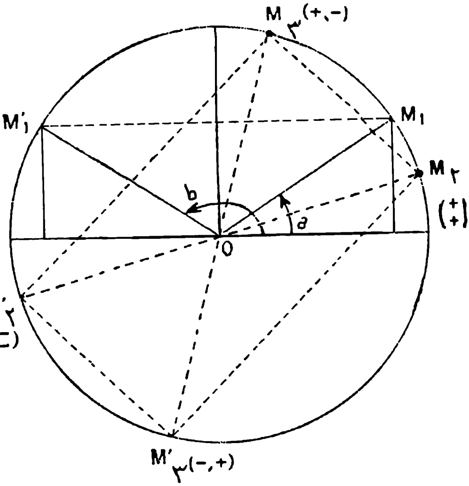
$$\begin{cases} \cos\frac{a}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱+\cos a}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۱+b}{۲}} \\ \sin\frac{a}{۱} = \pm\sqrt{\frac{۱-\cos a}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۱+b}{۲}} \end{cases} \qquad (۲۱)$$

(یادآوری می‌کنیم که زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}$ را با علامت + درنظرگرفته‌ایم).

۲) کمان a به‌وسیلهٔ سینوس آن داده شده است:

$$\sin a = b'$$

به‌سادگی می‌توان این‌حالت را به‌حالت سابق تبدیل کرد بارعایت‌این‌نکته که $\cos a$ باتقریب یك‌علامت بدست می‌آید (شکل ۱۹).



شکل ۱۹

$$\cos a = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲ a} = \pm\sqrt{۱ - b'^۲}$$

وازآنجا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \cos\frac{a}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ \pm \sqrt{۱ - b'^۲}}{۲}} \\ \sin\frac{a}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ \mp \sqrt{۱ - b'^۲}}{۲}} \end{cases} \qquad (۲۲)$$

به‌این ترتیب، ۴ مقدار برای سینوس و ۴ مقدار برای کسینوس بدست

می‌آید. معمولاً ترجیح داده می‌شود که با دو رابطهٔ زیرعمل کنند:

$$\begin{cases} sin\,a = b' = ۲\, sin\frac{a}{۲} cos\frac{a}{۲} \\ ۱ = cos^۲\frac{a}{۲} + sin^۲\frac{a}{۲} \end{cases}$$

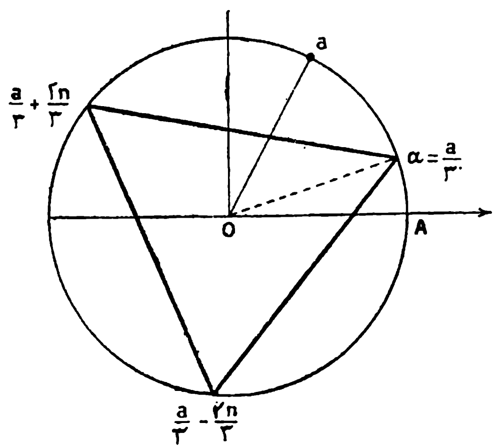
که محاسبهٔ مربوط به‌آن مشکل نیست.

تقسیم بر۳. مساله عبارت از اینست که $cos\,a = b$ (ویا $sin = b'$)

می‌باشد ومی‌خواهیم $cos\frac{a}{۳}$ و $sin\frac{a}{۳}$ را محاسبه کنیم.

مساله، منجربه‌حل معادلهٔ $T_۳(x) = b$ می‌شود ($T_۳$ چندجمله‌ای چبیشف از درجهٔسوم است) ویا

$$x(۴x^۲ - ۳) = b \qquad (۲۳)$$



شکل ۲۵

فرض کنیم می‌خواهیم معادلهٔ $cos۳\alpha = b$ را، که در آن b عدد مفروضی است، حل کنیم (روی دایرهٔ مثلثاتی معلوم است که اگر $|b| < ۱$

باشدمساله دارای جواب است.) وفرض کنیم که α کمانی باشد که درمعادلهٔ $cos ۳\alpha=b$ صدق کند (α از جدول بدست می‌آید). بین a وα رابطهٔ زیر برقرار خواهد بود:

$$cos\, a = cos ۳\alpha$$

واز آنجا:

$$a=\pm ۳\alpha+ ۲k\pi$$

یا:

$$\frac{a}{۳}=\pm\alpha+\frac{۲k\pi}{۳}$$

اگر k را برابر ۰ و۱ و۲ درنظر بگیریم، شش کمان مختلف روی دایرهٔ مثلثاتی بدست می‌آید، که انتهای آنها رأسهای دو مثلث‌متساوی الاضلاع را تشکیل می‌دهند و نسبت به محور کسینوسها قرینه‌اند (شکل ۲۰). درنتیجه، سه‌مقدار برای $x=cos\, a$ وجود خواهد داشت که با در دست‌داشتن α می‌توان آنها را ازجدول بدست‌آورد.

حل معادلهٔ (۲۳) یعنی معادلهٔ درجه سوم

$$۴x^۳-۳x-b=۰ \qquad (۲۳)'$$

را باکمك جدول مثلثاتی انجام دادیم. اکنون این‌پرسش پیش می‌آید. آیا نمی‌توان حل معادلهٔ غیرمشخص درجه سوم را به‌حل معادلهٔ:

$$T_۳(x)=b \qquad (۲۳)$$

منجرکرد. اگر بتوان این‌تبدیل را انجام داد؛ در اینصورت باید معادلهٔ عمومی درجه سوم دارای همان‌جوابهائی باشد که برای معادلهٔ(۲۳)بدست آوردیم. ولی ما می‌دانیم که همیشه اینطور نیست، بنابراین، این‌احتمال

هست‌که برای هرمعادلهٔ درجه سومی امکان این‌تبدیل وجود نداشته‌باشد. ما اکنون‌کوشش می‌کنیم با تبدیل یك‌معادلهٔ درجه سوم به معادلهٔ (۲۳) این مطلب را تحقیق‌کنیم.

حل مثلثاتی معادلهٔ درجه سوم

معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$$Az^{3}+Bz^{2}+Cz+D=0 \qquad (24)$$

که یك معادلهٔ درجهٔ سوم‌کلی بامجهول z است. $A\neq 0$ است (زیرا در غیراینصورت معادله، درجهٔ سوم نخواهد بود)؛ وبنابراین، می‌توان دو طرف معادله را برA تقسیم‌کرد ویا $A=1$ فرض کرد. اکنون با تغییر مجهول $z=X+h$ معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$(X+h)^{3}+B(X+h)^{2}+C(X+h)+D=0$$

یا

$$X^{3}+(3h+B)X^{2}+(3h^{2}+2Bh+C)X+h^{3}+$$
$$+Bh^{2}+Ch+D=0$$

برای‌اینکه جملهٔ ضریب X^{2} برابر صفر شود، کافی‌است $h=-\frac{B}{3}$ درنظر بگیریم ودر اینصورت معادله به‌صورت زیر درمی‌آید[1]:

$$X^{3}+pX+q=0 \qquad (25)$$

---

۱. صورت $x^{3}+px+q=0$ را صورت کانونیك (Canonique) معادلهٔ درجه سوم گویند.

ومعادلهٔ $T_3(x)=b$ که ما حل آنرا می‌دانیم به‌صورت زیر بود:

$$4X^3-3X-b=0 \qquad (23)'$$

حال، موضوع عبارت از اینست که آیا می‌توان باتغییر مجهول مناسبی (۲۵) را به $'$(۲۳) تبدیل کرد؟

اگر در(۲۵) مجهول X را به λX تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$\lambda^3X^3+p\lambda X+q=0$$

این معادله وقتی هم‌ارز با معادله $'$(۲۳) خواهد بود (یعنی‌همان جوابهای معادلهٔ $'$(۲۳) را دارد) که ضریبهای دومعادله متناسب‌باشند، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{\lambda^3}{4}=-\frac{p\lambda}{3}=-\frac{q}{b} \qquad (26)$$

از معادلهٔ اول λ بدست می‌آید (که مخالف صفر است)

$$\frac{\lambda^2}{4}=-\frac{p}{3} \qquad \text{یا} \qquad \lambda=\pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

به‌این ترتیب، برای λ وقتی مـی‌توان عددی در نظر گـرفت که $-\frac{p}{3}>0$ یعنی $p<0$ باشد.

حالا b را محاسبه مـی‌کنیم، این ضریب از معادلهٔ دوم دستگاه بدست می‌آید:

$$b=\frac{3q}{p\sqrt{-\frac{4p}{3}}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{q}{p\sqrt{-p}}$$

ودر اینصورت معادلهٔ به‌شکل (۲۴) دارای سه‌جواب زیر خواهد بود:

$$x_{۱}=\frac{۱}{\lambda}cos\alpha;\ x_{۲}=\frac{۱}{\lambda}cos(\alpha+\frac{۲\pi}{۳});$$

$$x_{۳}=\frac{۱}{\lambda}cos(\alpha-\frac{۲\pi}{۳})$$

که درآن α کمانی است‌که در رابطهٔ $cos۳\alpha=b$ صدق می‌کند.

b، که‌برابرباکسینوس یك‌زاویه است،باید درشرط $|b|<۱$ صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{q}{p\sqrt{-p}}<۱;\ \text{یا}\ \boxed{۴p^{۳}+۲۷q^{۲}<۰} \qquad (۲۷)$$

اگر این نامساوی برقرار نباشد، معادله از طریقی که ذکرکردیم قابل حل نخواهد بود (یادآوری می‌کنیم‌که باتوجه به‌این شرط می‌توان ازشرط $P<۰$، که‌قبلاً گفتیم، صرفنظرکرد). درنتیجه‌اگردرمعادلهٔ(۲۵) شرط(۲۷) وجود داشته باشد، تایید می‌شود که معادله دارای سه‌جواب است ومی‌توان جوابها را باتقریب لازم به‌وسیلهٔ جدولهای مثلثاتی و با روش مذکور دربالا بدست آورد.

۹. تبدیل مجموع $A cos\Theta+B sin\Theta$ به‌صورت ضرب وتبدیل صورت‌ضرب به‌مجموع $R cos(\Theta-\alpha)$

باتوجه‌به‌رابطهٔ $'$(۱۳)می‌توان عبارت $R cos(\Theta-\alpha)$ رابه‌صورت زیرنوشت:

$$R cos\alpha cos\Theta+R sin\alpha sin\Theta$$

اگر Θ را متغیر و R و α را مقدارهای ثابت فرض کنیم، می‌توان برای سهولت کار $R\cos\alpha = A$ و $R\sin\alpha = B$ قرار داد که در آن، A و B مقدارهایی ثابت هستند. وخواهیم داشت:

$$R\cos\alpha(\Theta-\alpha) = A\cos\Theta + B\sin\Theta$$

برعکس، مجموع $A\cos\Theta + B\sin\Theta$ را هم می‌توان به صورت $R\cos(\Theta-\alpha)$ نوشت. اگر A و B مقدارهای معلومی باشند، می‌توان دو عدد R و α را چنان انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$R\cos\alpha = A \quad \text{و} \quad R\sin\alpha = B \qquad (۲۸)$$

این دستگاه، که دارای دومجهول R و α است، به‌این ترتیب قابل حل است: دوطرف دومعادله را مجذور کرده وباهم جمع می‌کنیم:

$$R^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = A^2 + B^2$$

واز آنجا:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

چون تنها به‌یك‌جواب‌برای R و α نیاز داریم ومنظوربدست‌آوردن تمام جوابهای دستگاه‌نیست، می‌توان علامت جلو رادیکال رامثبت‌فرض کرد. اکنون با معلوم بودن R می‌توان α را به‌کمك یکی از معادله‌های دستگاه بدست‌آورد:

$$\cos\alpha = \frac{A}{R} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{و} \quad \sin\alpha = \frac{B}{R} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

و به این ترتیب می‌توان عبارت $A\cos\Theta + B\sin\Theta$ را به صورت $R\cos(\Theta-\alpha)$ نوشت. یادآوری می‌کنیم که $R\cos(\Theta-\alpha)$ را به‌صورت

$R\sin(\Theta-\beta)$ هم می‌توان نوشت که در آن $\beta=\alpha-\frac{\pi}{2}$ در نظر گرفته شده است.

صورت $R\cos(\Theta-\alpha)$ را «لگاریتمی» وصورت $A\cos\Theta+B\sin\Theta$ را «غیر لگاریتمی» گویند. درحقیقت، صورت اول به کمك جدولهای لگاریتمی قابل محاسبه است، درحالیکه صورت‌دوم به‌علت علامت‌جمع آن، قابل محاسبه لگاریتمی نیست.

درحالت‌کلی، هرعبارتی را که به‌صورت ضرب باشد، لگاریتمی وهر عبارتی راکه به‌صورت مجموع باشد، غیرلگاریتمی‌گویند.

در محاسبه‌های عددی، همیشه تبدیل یك عبارت لگاریتمی باعث سهولت عملیات می‌شود. تبدیل به‌عبارتهای لگاریتمی وقتی‌که مجهول زاویه است، چه دررابطه‌های عادی مثلثاتی یاحل مثلث ویا معادله‌های مثلثاتی، امری ضروری است (در بخشهای چهارم وپنجم باز دراین‌باره گفتگو خواهد شد).

۴

تانژانت یك كمان

زاویه‌هایی که با تقریب π معین می‌شوند

۱. تعریف تانژانت x

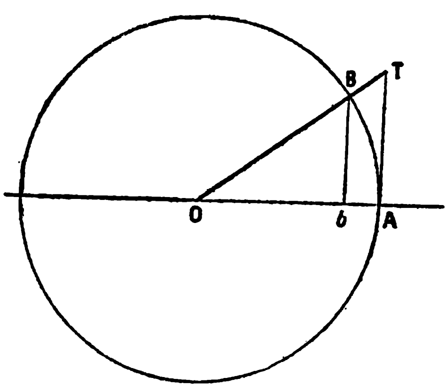
قبلاً دیدیم

$$\begin{cases} \cos(\pi+x) = -\cos x \\ \sin(\pi+x) = -\sin x \end{cases} \qquad (1)$$

این رابطه‌ها نشان می‌دهندکه اگر به x مقدار π را اضافه‌کنیم، نسبت $\frac{\sin x}{\cos x}$ تغییر نمی‌کند. این نسبت تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. در حقیقت اگر مثلث OBb را درنظر بگیریم، داریم:

$$\frac{\overline{ob}}{oB} = \cos x \quad \text{و} \quad \frac{\overline{bB}}{oB} = \sin x$$

واز آنجاکه دومثلث OBb و OTA متشابه‌اند، داریم:



شکل ۲۱

$$\frac{\overline{bB}}{\overline{ob}}=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{AT}}{1}$$

بنابراین، نسبت مذکور برابر باقطعهٔ $\overline{AT}$ از مماس نقطهٔ A است (که درجهت مثلثاتی توجیه‌شده است) (شکل ۲۱). ازرابطه‌های(۱)بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$tg(x+\pi)=tg x$$

و در حالت کلی، وقتی که k عددی درست باشد، داریم:

$$tg(x+k\pi)=tg x$$

به‌این ترتیب، $tg x$ زاویهٔ o را باتقریب π رادیان معین می‌کند و به‌همین مناسبت است که دراینحالت برای زاویه‌های توجیه شده، خطهای توجیه نشده را درنظر می‌گیرند.

۲. رابطه‌های ساده

$$tg^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1$$

واز آنجا

$$1+tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

تانژانت متمم یك کمان راکتانژانت آن کمان گویند:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot g x=\frac{1}{tg x}$$

همچنین، روشن است که $tg\frac{\pi}{۴}=۱$ و $tg\frac{\pi}{۲}$ نامعین است.

مقدارهای $cos\text{X}$، $sin\text{X}$، $tg\text{X}$ (و $cotg\text{X}$) را اغلب «خطهای مثلثاتی» کمان X گویند (اگرچه این نامگذاری هیچ‌چیز را مشخص نمی‌کند و بنابراین درست نیست).

مسالهٔ زیر، اگرچه یك مسالهٔ کاملا مقدماتی است، ولی اساسی است: اگر یکی از خطهای مثلثاتی زاویه‌ای معلوم باشد، آیا می‌توان سایر خطهای مثلثاتی آنرا پیدا کرد؟

۱) $tg\text{X}$ معلوم است، $sin\text{X}$ و $cos\text{X}$ را بدست آورید:

$tg\text{X}$ به‌وسیله $\overline{\text{AT}}$ روی محور تانژانتها مشخص می‌شود و بنابراین، انتهای کمانهایی که تانژانت آنها برابر $\overline{\text{AT}}$ می‌باشد روی دایرهٔ مثلثاتی دو نقطهٔ متقاطر تشکیل خواهند داد و درنتیجه $sin\text{X}$ و $cos\text{X}$ تنها با تقریب یك علامت مشخص می‌شوند.

رابطهٔ تعریف را می‌توان چنین نوشت:

$$tg^{۲}\text{X}=\frac{sin^{۲}\text{X}}{cos^{۲}\text{X}}=\frac{sin^{۲}\text{X}}{۱-sin^{۲}\text{X}}=\frac{۱-cos^{۲}\text{X}}{cos^{۲}\text{X}}$$

که از آنجا بلافاصله رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$cos\text{X}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{۱+tg^{۲}\text{X}}} \text{ و } sin\text{X}=\frac{\varepsilon tg\text{X}}{\sqrt{۱+tg^{۲}\text{X}}} \qquad (۳)$$

یادآوری می‌کنیم که ε در هر دو رابطه یکی است. زیرا نسبت $\frac{sin\text{X}}{cos\text{X}}$ باید برابر با $tg\text{X}$ باشد.

۲) sinx (یا cosx) معلوم است، tgx را بدست آورید. این‌مساله هم بلافاصله واز رابطهٔ تعریف حل می‌شود:

$$tg\text{x}=\frac{sin\text{x}}{\varepsilon\sqrt{۱-sin^{۲}\text{x}}} \text{ و } tg\text{x}=\frac{\varepsilon\sqrt{۱-cos^{۲}\text{x}}}{cos\text{x}} \qquad (۳)'$$

اکنون مساله‌هایی را که در مورد sinx و cosx طرح وحل کرده بودیم، دربارهٔ tgx هم مطرح می‌کنیم.

۳. رابطه‌های جمع برای تانژانتها

اگرزاویهٔ a وزاویهٔ b به‌وسیلهٔتانژانتهای آنها معین باشندیعنی‌هر یك ازآنها باتقریب π داده‌شده باشند، مجموع آنها هم باتقریب π معین خواهد بود.

به‌این ترتیب، مقدار tg(a+b) بر حسب مقادیر tgaوtgb گویا خواهد بود، این‌مطلب را به‌سادگی و بـاکمك رابطهٔ تعریف tg(a+b) می‌توان تحقیق کردکه درآنجا از رابطه‌های مجموع سینوس‌وکسینوس استفاده خواهیم‌کرد:

$$tg(\text{a}+\text{b})=\frac{sin(\text{a}+\text{b})}{cos(\text{a}+\text{b})}=\frac{sin\,\text{a}\,cos\,\text{b}+sin\,\text{b}\,cos\,\text{a}}{cos\,\text{a}\,cos\,\text{b}-sin\,\text{a}\,sin\,\text{b}}$$

واگرصورت ومخرج این‌کسر را برcosacosb تقسیم‌کنیم، تانژانتهاظاهر خواهند شد:

$$tg(\text{a}+\text{b})=\frac{tg\,\text{a}+tg\,\text{a}}{۱-tg\,\text{a}\,tg\,\text{b}} \qquad (۴)$$

واز رابطهٔ(۴) به‌سادگی رابطهٔ زیرهم بدست می‌آید:

$$tg(a-b)=\frac{tg a - tg b}{1+tg a\, tg b} \qquad (4)'$$

به‌این ترتیب، $tg(a+b)$ برحسب $tg a$ و $tg b$ به صورت یك تابع گویا بیان می‌شود، درحالیکه در مورد $sin(a+b)$ و $cos(a+b)$ چنین نبود. وقتی‌که تانژانت مجموع غیرمشخصی قوس هم‌داشته باشیم، همین خاصیت وجود دارد. اگر $sin(a+b+c)$ را بر $cos(a+b+c)$ تقسیم کنیم وبرای ساده‌بودن رابطه فرض‌کنیم:

$$\begin{cases} tg a+tg b+tg c=T_1 \\ tg a\, tg b+tg b\, tg c+tg a\, tg c=T_2 \\ tg a\, tg b\, tg c=T_3 \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$tg(a+b+c)=\frac{T_1-T_3}{1-T_2} \qquad (5)$$

ودر حالت‌کلی با علامتگذاریهایی شبیه بالا می‌توان بدست آورد:

$$tg(a_1+a_2+\dots+a_{2n})= \qquad (5)'$$

$$=\frac{T_1-T_3+T_5-T_7+\dots+(-1)^n T_{2n-1}}{1-T_2+T_4-T_6+\dots+(-1)^n T_{2n}}$$

(برای حالتی‌که تعدادکمانها زوج باشد) و:

$$tg(a_1+a_2+\dots+a_{2n+1})=$$

$$=\frac{T_1-T_3+T_5-\dots+(-1)^n T_{2n+1}}{1-T_2+T_4-\dots+(-1)^n T_{2n}}$$

(برای حالتی که تعدادکمانها فرد باشد).

۴. مضرب کمانها

۱) کمانهای دوبرابر ـ وقتی که زاویهٔ a با تقریب π معین باشد، زاویهٔ ۲a باتقریب ۲π معین خواهد بود. به‌عبارت دیگر بامفروض‌بودن $tg\,a$ نه‌تنها $tg\,۲a$ بدون هیچ ابهامی بدست می‌آید، بلکه $sin\,۲a$ و $cos\,۲a$ هم بدست خواهدآمد.

بنابراین سینوس، کسینوس وتـانژانت یك‌کمان تابع گویایی از تانژانت نصف آن‌کمان خواهند بود. این نتیجه ازمحاسبه هم بلافاصله بدست می‌آید. درحقیقت‌ابتداباتوجه به‌رابطهٔ (۴)بافرض a=b خواهیم داشت:

$$tg\,۲a=\frac{۲\,tg\,a}{۱-tg^۲a} \qquad (۶)$$

و به‌همین ترتیب داریم:

$$\begin{cases} sin\,۲a=۲\,sin\,a\,cos\,a=۲\,cos^۲a\,tg\,a=\dfrac{۲\,tg\,a}{۱+tg^۲a} & (۷)\\ cos\,۲a=۲\,cos^۲a-۱=\dfrac{۲}{۱+tg^۲a}-۱=\dfrac{۱-tg^۲a}{۱+tg^۲a} & (۸)\end{cases}$$

رابطه‌های بالا، که سینوس و کسینوس را به‌عنوان توابع‌گویایی از تانژانت نصف کمان، معین می‌کنند، از رابطه‌های بسیار اساسی‌اند و به‌خصوص در جبر عالی‌کاربرد فراوان دارند.

معمولا $tg\frac{a}{۲}=t$ فرض می‌کنند و در اینصورت رابطه‌های بالا به صورت زیر در می‌آیند:

$$(۸)' \quad sin a=\frac{۲t}{۱+t^۲} \text{ و } cos a=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲} \text{ و } tg a=\frac{۲t}{۱-t^۲}$$

هروقت که بخواهیم یك رابطهٔ‌مثلثاتی‌را به‌یك رابطهٔ جبری‌تبدیل کنیم، می‌توانیم ازاین رابطه‌ها استفاده‌کنیم.

۲) کمانهای سه‌برابر — وقتی‌که‌زاویهٔ a باتقریب π رادیان‌معین باشد، زاویهٔ ۳a باتقریب ۳πیعنی‌با همان‌تقریب π معین‌خواهد بود؛ به‌این ترتیب‌وقتی‌که $tg a$ معلوم‌باشد $sin ۳a$و$cos ۳a$ به‌طورمشخص‌معین‌نخواهد بود. $sin ۳a$و$cos ۳a$ نسبت به $tg a$ توابعی‌گویا نیستند.

$tg ۳a$ از رابطهٔ(۴) با فرض $b=۲a$ بدست می‌آید:

$$tg ۳a=tg(۲a+a)=\frac{tg ۲a+tg a}{۱-tg a\, tg ۲a}$$

که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(۹) \quad tg ۳a=\frac{۳tg a-tg^۳ a}{۱-۳tg^۲ a}=\frac{tg a(tg^۲ a-۳)}{۳\left(tg^۲ a-\frac{۱}{۳}\right)}$$

تبصره ۱ـ a) درستی این رابطه را می‌توان به‌این ترتیب تحقیق کرد که:

۱) اگر داشته باشیم: $۳a=k\pi$ یا $a=\frac{k\pi}{۳}$ ، خـواهیم داشت:

$tg3a=0$ واین مقداری است که صورت کسر را صفر می کند.

$tga=\pm\sqrt{3}$ و $tga=0$

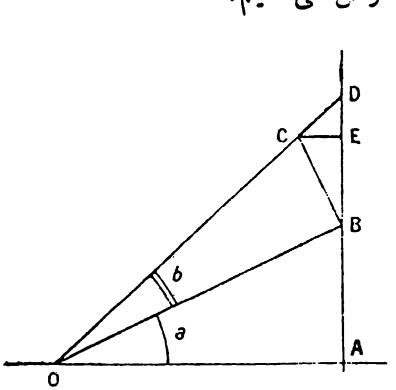
۲) اگر داشته باشیم: $3a=\frac{\pi}{2}+k\pi$ یا $a=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$، tga بینهایت

است، که در اینصورت مخرج کسر مساوی صفر و $tga=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ می‌شود.

ازاینجاضمناً می‌توان تانژانتهای قوسهای $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ ومضربهای آنها را پیدا کرد، سینوس و کسینوس این قوسها را درآخرهای فصل دوم حساب کرده بودیم.

تبصره ۲ - ما برای اثبات رابطهٔ $tg(a+b)$ از نتیجه‌های مربوط به سینوس و کسینوس استفاده کردیم. می‌توان این رابطه را مستقیماً وازتعریف ساده تانژانت‌هم بدست آورد، ولی البته‌محاسبهٔ آن خیلی خوش‌آیند نیست. دراینجا یك نمونه‌ازاین‌روشهای‌مستقیم را ذکر می کنیم.

در شکل ۲۲ فرض می کنیم:



شکل ۲۲

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = a \text{ و } (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = b$$

(a و b و a+b را حاده گرفته‌ایم).

$$tg\,a = \frac{\overline{AB}}{OA} \text{ و } tg\,b = \frac{\overline{BC}}{OB}$$

بنابراین:

$$tg(a+b) = \frac{\overline{AD}}{OA} = \frac{\overline{AB}+\overline{BE}+\overline{ED}}{OA}$$

چون تانژانت زاویه‌های مورد نظر مثبت است، داریم:

$$\frac{\overline{AB}}{OA} = tg\,a \text{ و } \frac{\overline{BE}}{OA} = \frac{\overline{BC}}{OB} = tg\,b$$

(زیرا مثلثهای OAB و BEC متشابه‌اند).

بالاخره

$$ED = CE \times tg(a+b) = BE\,tg\,a \cdot tg(a+b)$$

واز آنجا

$$\frac{\overline{ED}}{OA} = \frac{\overline{BE}}{OA} tg\,a\,tg(a+b) = tg\,b\,tg\,a\,tg(a+b)$$

و یا

$$tg(a+b) = tg\,a + tg\,b + tg\,a\,tg\,b\,tg(a+b)$$

یعنی:

$$tg(a+b)=\frac{tg a+tg b}{1-tg a\, tg b}$$

۵. تبدیل مجموع تانژانتها

مجموع دوتانژانت را می‌توان چنین نوشت:

$$tg p+tg q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\cos p\cos q}$$

واز آنجا

$$tg p+tg q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p.\cos q} \qquad (۱۰)$$

در حقیقت مجموع دوتانژانت به‌صورت ضرب تبدیل نشد، باوجود این اغلب بهتراست که رابطهٔ (۱۰) را به‌کار ببریم زیرا نسبت $\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$ قابل محاسبهٔ لگاریتمی است.

همچنین رابطه‌های شبیه رابطهٔ (۱۰) را می‌توان بدست آورد:

$$tg p-tg q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q} \qquad (۱۰)'$$

$$\cot g p+\cot g q=\frac{\sin(p+q)}{\sin p.\sin q}$$

$$\cot g p+tg q=\frac{\cos p}{\sin p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\cos(p-q)}{\sin p\cos q}$$

۶. تقسیم کمانهایی که با تقریب π معین هستند

مسالهٔ مربوط به‌تقسیم کمانها، وقتی که تانژانت آنها معلوم‌است، چنین است: $tg\,a$ معلوم است، مطلوبست محاسبهٔ $tg\frac{a}{n}$.

اگر دررابطه‌های '(۵) و ''(۵) قراردهیم: $a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{a}{n}$، رابطه‌هایی بدست می‌آیدکه جواب مساله‌را خواهد داد. درحقیقت، به‌این ترتیب، مساله به‌حل یك‌معادلهٔ جبری منجر می‌شود.

اگر α یکی ازجوابهای‌مساله باشد، $\alpha+\frac{k\pi}{n}$ هم‌جواب‌مساله‌خواهد بود. بنابراین، مساله دارای n جواب متمایز است‌که همیشه‌وجود دارند (این مطلب‌را باهمان‌روشی‌که درموردکمانهای باتقریب 2π به‌کاربردیم می‌توان ثابت‌کرد). بـه‌این ترتیب، همهٔ ریشه‌های معادله‌های مربوط به تقسیم قوسها، حقیقی هستند؛ مثلا، معادله‌ای‌که $tg\frac{a}{3}$ رابرحسب $tg\,a=b$ می‌دهد، به‌وسیلهٔ رابطهٔ(۹) داده می‌شود (که در آنجا a به $\frac{a}{3}$ تبدیل شده است). اگر $tg\frac{a}{3}=x$ باشد، این معادله به‌این صورت در می‌آید:

$$b=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$$

و یا:

$$x^3-3bx^2-3x+b=0$$

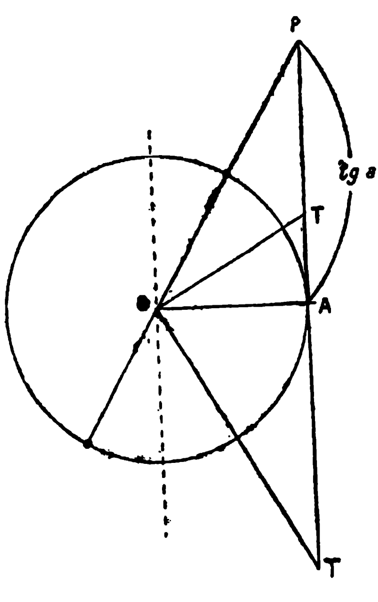
حالا، به‌بررسی این‌مطلب مـی‌پردازیم که معادله همیشه سه‌ریشهٔ حقیقی دارد. برای‌اینکارقبل ازهمه معادله را به‌صورت ساده (کانونیك) می‌نویسیم؛ یعنی اگرمجهول جدید را $X=x-b$ فرض‌کنیم، خواهیم داشت:

$$X^{۳}-۳(b^{۲}+۱)X-۲b(۱+b^{۲})=۰$$

مبین این معادله چنین است:

$$۴p^{۳}+۲۷q^{۲}=-۱۰۸(۱+b^{۲})^{۲}$$

وهمانطورکه می‌بینیم مبین همیشه منفی‌است وبنابراین معادله‌به‌ازای‌هر مقدار b دارای سه‌ریشهٔ حقیقی است.



شکل ۲۳

حالت خاص مربوط به‌نصف قوسها را بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم: مساله، مربوط به‌این است که بادر دست داشتن $tg\,a = b$ می‌خواهیم $tg\frac{a}{۲}$ را بدست آوریم. a باتقریب π رادیان معین است و بنابراین $\frac{a}{۲}$ باتقریب $\frac{\pi}{۲}$ رادیان معین خواهدبود. بنابراین به‌عنوان جواب، تانژانتهای دو کمان با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ را بدست خواهیم آورد و از آنجا دو جواب عکس قرینهٔ یکدیگرند، [زیرا $tg(x+\frac{\pi}{۲}) = -\frac{۱}{tg\,x}$]. اگر جوابها را t' و t'' فرض کنیم، داریم:

$t'.t'' = -۱$

همانطور که دیده می‌شود مساله همیشه دارای دوجواب است (مگر وقتی که یکی ازجوابها مساوی $tg\frac{\pi}{۲}$ شود که در اینصورت دیگری مساوی صفر شده وتنها جواب مساله خواهد بود).

به‌طریق محاسبه‌هم به‌سادگی می‌توان به‌نتیجه رسید، اگر $tg\frac{a}{۲} = t$ باشد، دراینصورت خواهیم داشت:

$$\frac{۲t}{۱-t^۲} = b$$

و ازآنجا

$$t^۲ + \frac{۲}{b}t - ۱ = ۰$$

معادله‌دارای دوجواب است وحاصلضرب دوجواب هم مساوی ۱ − است. اگر $b = ۰$ باشد $(a = k\pi)$ معادله به‌صورت $t = ۰$ $(tg\frac{a}{۲} = ۰)$ در

می‌آید وجواب صفر، جواب منحصر به‌فرد آن می‌شود.

روی شکل (۲۳) هم بلافاصله می‌توان بدست‌آوردکه

$$\overline{AT'} \times \overline{AT''} = -\overline{OA}^{۲}$$

ویا

$$t'.t'' = -۱$$

۵
معادله‌های مثلثاتی

بسیاری ازمساله‌ها، منجر به معادله‌هایی‌می‌شوندکه مجهول آنها در حالت‌کلی یك زاویه است، ولی این مجهول به‌وسیلهٔ یك یا چندخط مثلثاتی آن بیان شده است. چنین معادله‌ای را معادلهٔ مثلثاتی‌گویند،با این شرط‌که مجهول تنها به‌شکل خطهای مثلثاتی آن داده شده‌باشد (ونه اینکه فی‌المثل شامل توانهائی از x و یا $\log x$ و غیره هم باشد) مثلاً معادله‌های

$$\cos x=\cos ۲x، \quad \sin x=۲\sin(x\sqrt{۲})،$$

$$\cos^۳\frac{x}{۲}+\sin x=۱+tg^۳x،$$

$$(۲-\sin^۲\frac{x}{۳})\sqrt{۱+\cos^۲x}=k،....$$

معادله‌های مثلثاتی هستند، درحالیکه معادله‌های

$$x+\sin x=\frac{۴}{۳}، \quad \sin\pi\sqrt{x}=۲\sqrt{x}،$$

$$\log x=\sin x، \quad x^۲-۳x+۲=a\sin xL(\cos x)$$

معادله‌های مثلثاتی نیستند. ($\log$ ویا L معروف لگاریتم هستند: اولی دهدهی و دومی نپری).

راه‌حل‌کلی برای‌معادله‌های مثلثاتی وجود ندارد وتنهامعادله‌های

محدود و بسیار ساده را می‌توان حل کرد. ما هم تنها بذکر معادله‌هایی که اغلب مورد استفاده دارند اکتفا می‌کنیم.

تبصره . ـ درحل معادله‌های مثلثاتی، اغلب کوشش می‌شود که آنها را به‌معادله‌های جبری تبدیل کنند. با این روش یکی ازخطهای مثلثاتی را مجهول کمکی می‌گیرند وبنابراین، حل معادله بالاخره منجر به‌حل یکی ازمعادله‌های سادهٔ زیر می‌شود:

$$\cos x = a \; ; \quad \sin x = b \; ; \quad tg\, x = c$$

و به‌همین مناسبت است که ماهم درفصل معادله‌های مثلثاتی، ازحل همین سه معادله آغاز می‌کنیم.

۱. معادله‌های اصلی

۱) $\cos x = a$. این معادله ناشی ازمسالهٔ زیراست: کمانی را پیدا کنید که کسینوس آن معلوم باشد. وما این مساله را در فصل دوم، به تفصیل حل کردیم. روی محورکسینوسها، ازنقطهٔ O پاره‌خط $\overline{OA}$ باطول جبری a جدا می‌کنیم، سپس ازنقطهٔ A عمودی برOA اخراج می‌کنیم تا دایرهٔ مثلثاتی را در نقطه‌های M و M' قطع کند، M و M' انتهای کمانهای جواب هستند. φ را یکی ازاین دو مقدار درنظر می‌گیریم و مثلاً آنکه روبه‌روی زاویهٔ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ قرارگرفته است، و بنابراین مثبت وکوچکتر از π است. تمام کمانهای x که جواب معادله‌اند چنین است:

$$\begin{cases} x=\varphi+2k\pi \\ x=-\varphi+2k\pi \end{cases}$$

کمان φ (که به‌ازای $k=0$ بدست می‌آید) «کمان اصلی» نامیده می‌شود. گاهی مقدار φ را چنین می‌نویسند: $\varphi=\text{Arc}\cos a$ (که آنرا چنین می‌خوانند: φ برابراست با کمانی که کسینوس آن برابر a می‌باشد). Arc را با حرف بزرگ A می‌نویسند که از سایر جوابها متمایز باشد و معلوم شود که: $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$

مساله تنها به‌شرطی جواب دارد که $|a|\leqslant 1$ باشد؛ اگر $a=1$ باشد $x=2k\pi$ واگر $a=-1$ باشد، خواهد شد: $x=(2k+1)\pi$

۲) $\sin x=b$. (کمانی را پیدا کنید که سینوس آن معلوم باشد).

روش کار شبیه بالاست: $\overline{OB}=b$ را روی محور سینوسها جدا می‌کنیم. اگر $|b|<1$ باشد، دونقطه N و N′ متقارن نسبت به‌محور oy روی دایرهٔ مثلثاتی بدست خواهیم آورد.

اگر Θ زاویهٔ بین (ON و Ox) باشد $\left(-\frac{\pi}{2}<\Theta<\frac{\pi}{2}\right)$، تمام جوابهای x معادله از رابطه‌های زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} x=\Theta+2k\pi \\ x=\pi-\Theta+2k\pi \end{cases}$$

که درآن Θ «کمان اصلی» است. قرارداد $\Theta=\text{Arc}\sin b$ معرف اینست که Θ کمانی است واقع بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ که سینوس آن برابر است با b.

۳) $\text{tg}\, x=c$. (کمانی را پیدا کنید که تانژانت آن معلوم است).

روی محور تانژانتها قطعه $\overline{AP}=c$ را جدا می‌کنیم، مقدار c هرچه باشد نقطه‌ای برای P پیدا خواهد شد وخط OP دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطهٔ

Q′وQ قطع می کند. دونقطهٔ مذکوردونقطهٔ متقاطر ازدایرهٔ مثلثاتی‌است وانتهای همهٔ کمانهای جواب معادله‌می‌باشند. اگر ψ زاویهٔ (Ox، OP) و واقع‌بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ باشد، تمام‌کمانهای x جواب معادله‌بارابطهٔ زیرمعین می‌شوند:

$$x=\psi+k\pi$$

که دراینجا هم ψ «کمان اصلی» نـامیده می‌شود. قرارداد $\psi=Arctgc$ هم به‌معنای آنست که ψ کمانی است واقع بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ که‌تانژانت آن برابر است با c

اکنون بااستفاده‌ازاین‌سه‌معادله‌بعضی‌ازمعادله‌های معمول‌مثلثاتی راکه با تبدیلهای ساده‌ای حل‌می‌شوند، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲. معادله‌هایی‌که به معادله‌های اصلی منجر می‌شوند

۱ معادله‌های خطی نسبت به‌سینوس وکسینوس:

روشن است‌که دومعادلهٔ:

$$M\cos x=a \text{ و } N\sin x=b$$

به‌سادگی‌به‌معادله‌های‌اصلی(۱)و(۲) تبدیل می‌شوند، همچنین معادله‌های

$$M\cos(x-h)=a \text{ و } N\sin(x-h)=b \qquad (۴)$$

زیرا کافی‌است‌که درمعادله‌های (۴) ، $x-h=X$ فرض‌کرده ودوطرف معادله را برM (یا N) تقسیم‌کنیم.

همچنین معادله‌های(۴) را با بسط‌دادن‌آنها می‌توان به‌صورت‌زیر

هم نوشت:

$$M\cos h\cos x + M\sin h\sin x = a$$
$$N\cos h\sin x - N\sin h\cos x = b$$

باتوجه به‌اینکه $\cos h$ و $\sin h$ وهمچنین a وb مقادیرثابتی‌هستنددو معادله بالا را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$A\cos x + B\sin x = C \qquad (۴)'$$

وقتی‌که از معادلهٔ(۴) به‌معالهٔ('۴) رسیدیم، خواهیم توانست در جهت‌عکس‌هم،ازمعادلهٔ '(۴) به‌معادلهٔ(۴)برسیم. کافی‌است‌که M وh را باشرطهای $M\cos h = A$ و$M\sin h = B$ پیداکنیم.

جوابهای این دستگاه چنین خواهد بود:

$$tg h = \frac{B}{A}; \ M^۲ = A^۲ + B^۲$$

و دراینصورت معادلهٔ '(۴) به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$\cos(x - h) = \frac{C}{\sqrt{A^۲ + B^۲}}$$

واین معادله به‌شرطی دارای جواب است‌که داشته باشیم:

$$A^۲ + B^۲ - C^۲ > ۰ \qquad \text{و یا} \ \frac{|C|}{\sqrt{A^۲ + B^۲}} < ۱$$

معادلهٔ '(۴) را معادلـهٔ خطی نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ (و یا به‌طور ساده، معادلهٔ خطی) گویند.

نتیجه‌های قبلی را می‌توان عملاً بـه‌ترتیب زیرانجام داد؛ ابتدا

تمام جمله‌ها را بر A تقسیم می‌کنیم:

$$\cos x + \frac{B}{A}\sin x = \frac{C}{A} \qquad (۵)$$

سپس $\frac{B}{A} = tg\,h = \frac{\sin h}{\cos h}$ قرار می‌دهیم؛ معادله (۵) به‌صورت:

$$\cos(x-h) = \frac{C}{A\cos h}$$

درمی‌آید (که درآنجا طرف دوم‌معادله مقدار معلومی است). به‌خصوص در حالتی‌که A وB وC ضریبهای عددی هستند، این‌روش به‌سادگی و با کمك جدول مقادیر خطهای مثلثاتی، به‌نتیجه می‌رسد.

تعبیر هندسی ـ معادلهٔ به‌شکل:

$$A\cos x + B\sin x = C \qquad (۴)'$$

را می‌توان به‌سهولت به‌وسیلهٔ یك شکل هندسی تعبیر کرد (شکل ۲۴).

دوبردار عمود برهم $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{PQ}$ باطولهای A وB درنظرمی‌گیریم $x = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$ فرض می‌کنیم، که در نتیجه $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{PQ}) = x + \frac{\pi}{۲}$ می‌شود.

طرف اول‌معادلهٔ $(۴)'$ عبارتست ازتصویر برداری $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ روی Ox وبنابراین، باتوجه به‌قضیهٔ تصویرها داریم:

$$\text{تصویر}\,\overrightarrow{OQ} = \text{تصویر}\,\overrightarrow{PQ} + \text{تصویر}\,\overrightarrow{OP}$$

یا

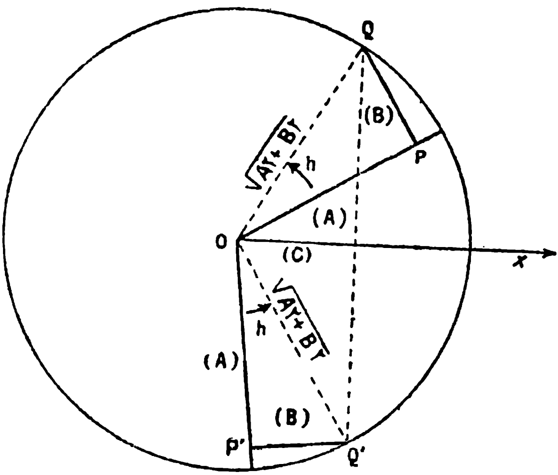
$$A\cos x + B\sin x = |\overrightarrow{OQ}|\cos(Ox, OQ)$$

اما داریم $\left|\overrightarrow{OQ}\right|=\sqrt{A^{۲}+B^{۲}}$

و

$$(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OQ})=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ})=x+h$$

(که در آن $tg h=\frac{PQ}{OP}=\frac{B}{A}$ است) وبنابراین همان رابطه‌ای کـه در بالا پیدا کرده بودیم، بدست می‌آید.



شکل ۲۴

ازنظرهندسی‌وقتی که x تغییر می کند، نقطهٔ Q دایره‌ای‌به‌مرکزO وبه‌شعاع $\sqrt{A^{۲}+B^{۲}}$ رسم‌خواهد کرد.حل‌معادله‌(۴)' منجربه‌این‌می‌شود که روی‌شعاع این‌دایره،نقطه‌ای‌به‌طول C پیدا کنیم وروشن‌است که‌این‌امروقتی ممکن است که C مقداری‌کوچکتر ازشعاع $\sqrt{A^{۲}+B^{۲}}$ باشد.

برای جواب دونقطهٔ Q'وQ که نسبت بـه Ox متقارن‌اند بدست می‌آید. باکمك Q'وQ نقطه‌های P و P' واز آنجامقادیر x بدست‌می‌آید.

تبصره. ـ بااستفاده ازتعبیر هندسی قبل می‌توان‌روش‌عمومی‌برای یك‌دسته وسیع ازمعادله‌ها پیدا کرد. در حقیقت، تعمیم را از اینجهت می‌توان داد که دوبردار $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{PQ}$ راعمود برهم فرض نکنیم ویا بیش از دوبردار مثل $\overrightarrow{OP_1}$، $\overrightarrow{P_1P_2}$، $\overrightarrow{P_2P_3}$ و... را در نظر بگیریم که زاویه‌های بین‌آنها مقداری ثابت باشد. به‌خصوص حالتی‌که بردارها یك‌خط‌شکسته منتظم تشکیل‌دهند جالب خواهد بود (فصل اول شمارهٔ ۶ را ببینید).

حالت خاص. ـ معادلهٔ′(۴) حالتهای‌خاص جالبی دارد، اگر A یا B یا C برابر باصفر باشند، معادله بلافاصله به‌یکی از معادله‌های اصلی تبدیل می‌شود. اگر $B=C$ باشد، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A\cos x=B(1-\sin x)$$

و یا
$$2A\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=2B\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

که از دومعادله اصلی جداگانه تشکیل شده است:

$$1)\qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0\rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$2)\qquad tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{A}{B}$$

وبه‌همین ترتیب درحالتهای $C=-B$ یا $A=C$. مثلاً درحالت اخیر داریم:

$$A(\cos x-1)=-B\sin x$$

یا :
$$2A\sin^2\frac{x}{2}=2B\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

وجوابها چنین‌اند:

۱) $sin\frac{x}{۲}=۰ \rightarrow x=۲k\pi$

۲) $tg\frac{x}{۲}=\frac{B}{A}$

راه‌حل دیگری هم برای معادلهٔ خطی $'$(۴) وجود دارد که بر طبق آن، به‌یك معادلهٔ معمولی درجهٔ دوم می‌رسیم. کافی است که $tg\frac{x}{۲}=t$ قراردهیم، تامعادلهٔ $'$(۴) به‌صورت زیر درآید:

$$A(۱-t^۲)+۲Bt=C(۱+t^۲)$$

و یا: $$(A+C)t^۲-۲Bt+C-A=۰$$

واین‌معادله، به‌شرطی دارای‌دوجواب‌حقیقی متمایز است‌که داشته‌باشیم:

$$B^۲-(C+A)(C-A)>۰$$

و یا: $$A^۲+B^۲-C^۲>۰$$

واین همان شرطی است‌که قبلاهم پیداکردیم. اگر این‌شرط برقرارباشد، معادلهٔ $'$(۴) به‌دومعادلهٔ اصلی زیرتبدیل می‌شود:

$$tg\frac{x}{۲}=t' \quad و \quad tg\frac{x}{۲}=t''$$

این‌طریقهٔ حل‌برای‌محاسبه‌های‌عددی‌مناسب‌نیست، زیرارابطه‌هایی که‌بدست می‌آید، قابل محاسبهٔ لگاریتمی نیستند. این راه برای مواردی مفید است‌که A وB وC پارامتری باشند واحتیاج به‌بحث درمعادله‌داشته باشیم.

مثلا معادلهٔ زیر را در نظربگیرید:

$$\cos x+\sqrt{۳}\sin x=\sqrt{۲-\sqrt{۲}} \qquad (۵)$$

می‌دانیم که $\sqrt{۳}=tg\frac{\pi}{۳}$ و $\sqrt{۲-\sqrt{۲}}=۲\cos\frac{۳\pi}{۸}$ است، بنابراین معادلهٔ(۵) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\cos(x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}=\cos\frac{۳\pi}{۸}$$

و از آنجا: $$x=\frac{\pi}{۳}\mp\frac{۳\pi}{۸}+۲k\pi$$

دراین مثال $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ دقیقاً بـرابر کسینوس یك کمان شناخته شده بود. این معادله را از راه‌حل دوم هم می‌توان بـه‌نتیجه رساند، اگر $tg\frac{x}{۲}=t$ باشد، معادلهٔ(۵) چنین می‌شود:

$$(۱+\sqrt{۲-\sqrt{۲}})t^{۲}-۲\sqrt{۳}t+\sqrt{۲-\sqrt{۲}}-۱=۰$$

ابتدا مبین معادله را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=۳-(۲-\sqrt{۲}-۱)=۲+\sqrt{۲}$$

و بنابراین جوابها چنین‌اند:

$$\left.\begin{matrix}tg\frac{x'}{۲}\\ tg\frac{x''}{۲}\end{matrix}\right\}=\frac{\sqrt{۳}\pm\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۱+\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}$$

واین عددها بـا توجه به‌جوابهای معادلـه‌که از راه اول بدست آوردیم تانژانتهای دو کمان $\frac{17\pi}{48}$ و $-\frac{\pi}{48}$ هستند.

عکس مساله را نیزمی‌توان حل‌کرد. به‌این معنی که می‌توان حل یك معادلهٔ عددی درجهٔ دوم را منجر به‌حل یك معادلهٔ خطی‌مثلثاتی‌کرد که درآنجا رابطه‌هایی قابل محاسبه با لگاریتم بدست می‌آید.

معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را درنظر بگیرید:

$$x^2+px+q=0 \qquad (6)$$

اگر $x=tg\frac{\alpha}{2}$ فرض‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+p\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+q\cos^2\frac{\alpha}{2}=0$$

واگر به‌کمان دوبرابر تبدیل‌کنیم

$$1-\cos\alpha+p\sin\alpha+q(1+\cos\alpha)=0$$

و یا پس از منظم‌کردن

$$(q-1)\cos\alpha+p\sin\alpha+q+1=0$$

اکنون اگر $\frac{p}{q-1}=tg\varphi$ فرض‌کنیم، معادله چنین می‌شود:

$$\cos(\alpha-\varphi)=-\frac{q+1}{q-1}\cos\varphi$$

اگرکمان Θ واقع بین صفر و π، چنان باشدکه داشته باشیم:

$$-\frac{q+1}{q-1}\cos\varphi=\cos\Theta$$

خواهیم داشت:

$$\alpha-\varphi=\pm\Theta+2k\pi \quad \left(\left|\frac{q+1}{q-1}\cos\varphi\right|<1 \text{ با شرط }\right)$$

و ازآنجا دو ریشهٔ معادلهٔ(۶) چنین می‌شود:

$$x'=tg\frac{\alpha_1}{2}=tg\frac{\varphi-\Theta}{2}$$

$$x''=tg\frac{\alpha_2}{2}=tg\frac{\varphi+\Theta}{2}$$

شرط $\left|\frac{q+1}{q-1}\cos\varphi\right|<1$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}>\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2 \text{ یا } 1+\frac{p^2}{(q-1)^2}>(q+1)^2$$

که با شرط $q\neq 1$ به‌صورت $p^2-4q>0$ در می‌آید. واین همان‌شرط حقیقی بودن ریشه‌ها برای معادلهٔ(۶) است.

اگر $q=1$ باشد، معادلهٔ (۶) یك معادلهٔ معکوسه خواهد شد (حاصلضرب دو ریشه‌اش مساوی واحد می‌شود) و می‌توان نوشت $\sin\alpha=-\frac{2}{p}$. واین معادله وقتی جواب داردکه داشته باشیم:

$$\frac{2}{|p|}<1 \text{ یا } p^2-4>0$$

واین‌همان شرط قبلی است‌که به‌ازای $q=1$ بدست آمده است وبنابراین شرط وجود جوابهای حقیقی همان $p^2-4q>0$ است.

۲) معادلهٔ $\cos nx = k$ (۷)

اگر در این معادله $nx = X$ فرض کنیم، روشن می‌شود که همان معادلهٔ اصلی(۱) است. اگر $|k| < 1$ باشد، می‌توان $k = \cos\varphi$ گرفت و ازآنجا خواهیم داشت:

$$X = \pm\varphi + 2k\pi$$

و در نتیجه: $$x = \pm\frac{\varphi}{n} + \frac{2}{n}k\pi$$

ولی این معادله همیشه به‌صورتی که ذکر کردیم داده نمی‌شود واغلب به شکلی است که شناختن آن دشوار است. مثلا فرض کنید کـه در معادلهٔ $\cos 3x = k$ به‌جای $\cos 3x$ مقدارآنرابرحسب $\cos x$ یعنی $4\cos^3 x - 3\cos x$ قراردهیم وسپس تغییرمجهولی به‌شکل $x = X + h$ بدهیم، دراینصورت معادله‌ای به‌شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$A\cos^3 x + B\cos^2 x \sin x + C\cos x + D\sin x = k \qquad (8)$$

که درآن مقادیر A و B و C و D تابعهایی از h هستند.

روشن است که به‌ندرت می‌توان تشخیص داد که شکل مخفی معادلهٔ بالا همان $\cos 3(X+h) = k$ می‌باشد. از طرف دیگر روشن است که چنین معادله‌ای هم راه‌حل کلی ندارد و تنها در موارد معدودی که قابل ساده کردن باشد می‌توان آنرا به‌نتیجه‌رسانید. یکی ازمواردی که معادله قابل حل می‌شود، وقتی است که $h = \frac{\pi}{4}$ باشد، زیرا در اینصورت معادله نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ متقارن می‌شود.

یادآوری می‌کنیم (و این چیزی است که همه‌جا به‌کار می‌آید) تمام معادله‌هایی که به‌صورت

$$\Sigma(\sin X \text{ ، } \cos X) = ۰ \qquad (۹)$$

باشند (علامت Σ به‌معنای آنست که چندجمله‌ای نسبت به $\sin X$ و $\cos X$ متقارن است)، همیشه با تغییر مجهول $x = X + \frac{\pi}{۴}$ به صورت ساده‌تری تبدیل می‌شوند. درجبر می‌دانیم، تمام چند جمله‌ایهایی که نسبت به دو مقدار μ و λ متقارن باشند، برحسب $u = \lambda + \mu$ و $v = \lambda . \mu$ قابل بیان‌اند. یعنی دراینجا عبارتی که نسبت به $\sin X$ و $\cos X$ متقارن باشد می‌تواند بر حسب $u = \sin X + \cos X = \sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۴} - x)$ و $v = \sin X \cos X = \frac{۱}{۲}\cos ۲\,(\frac{\pi}{۴} - x)$ بیان شود.

اکنون اگر $X = x - \frac{\pi}{۴}$ قرار دهیم: $u = \sqrt{۲}\cos X$ و $v = \frac{۱}{۲}\cos ۲X = \cos^۲ X - \frac{۱}{۲}$ خواهد شد. و به‌این ترتیب چند جمله‌ای $\Sigma(\cos x \text{ ، } \sin x)$ به‌صورت یك چندجمله‌ای از $\cos X$ درمی‌آید و معادلهٔ (۹) به معادله‌ای به‌صورت $p(\cos X) = ۰$ تبدیل می‌شود. اگر $\cos X = z$ بگیریم به معادلهٔ جبری $P(z) = ۰$ می‌رسیم و بنابراین یك مسالهٔ جبری خواهیم داشت. چه این معادلهٔ جبری قابل حل باشد ویا قابل حل نباشد، مساله ازدیدگاه مثلثات به‌پایان رسیده است.

حالت ساده‌ای ازاین نوع معادله‌هارا موردبحث قرارمی‌دهیم (معادلهٔ خطی نسبت به u و v):

$$A(\sin x+\cos x)+B\sin x\cos x+C=0 \qquad (10)$$

با توجه به‌تغییر مجهولهای قبلی خواهیم داشت:

$$Bz^2+A\sqrt{2}z+C-\frac{B}{2}=0$$

واین معادله به‌شرطی دارای جواب است که اولا $A^2+B^2-2BC>0$ وثانیاً جوابهای معادله مقادیر واقع بین ۱ — و ۱ + باشند.

این راه حل را می‌توان تعبیرهندسی کرد: دایرهٔ مثلثاتی رادرنظر می‌گیریم، $o\lambda$ رامحور کسینوسهاو $o\mu$ را محورسینوسها فرض‌می‌کنیم. اگر $\cos x=\lambda$ و $\sin x=\mu$ فرض کنیم، معادلهٔ(۱۰) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$A(\lambda+\mu)+B\lambda\mu+C=0 \qquad (10)'$$

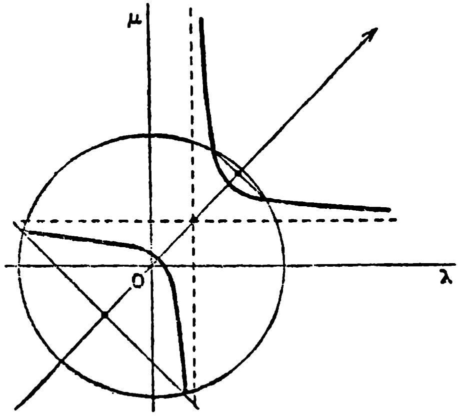
از طرف دیگر روشن است که باید داشته باشیم: $\lambda^2+\mu^2=1$ (مجموع مربعهای سینوس وکسینوس برابر واحد است). به‌این ترتیب حل‌مساله، به‌پیداکردن نقطه‌های برخورد دومنحنی زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases}\mu=-\dfrac{B\lambda+C}{B\lambda+A}\\ \lambda^2+\mu^2=1\end{cases}$$

معادلهٔ اول یك تابع هموگرافیك است وبنابراین نمایش تغییرات آن یك هذلولی متساوی‌الساقین است که مجانبهایی موازی $o\lambda$ و $o\mu$ دارد ونیمساز زاویهٔ $\lambda o\mu$ محور تقارن‌آنست. معادلهٔ دوم هم‌معادلهٔ‌دایرهٔ

مثلثاتی است. این دومنحنی یکدیگر را حداکثر در۴ نقطه قطع‌می‌کنند، که تصویرهای آنها روی محور تقارن تنها دونقطه است وبنابراین به‌یك معادلهٔ درجه دوم منجر می‌شود.

جوابها وقتی وجوددارد که دایره وهذلولی یکدیگر را قطع کنند، با بحث عادی معادلهٔ درجه دوم حالتهای مختلف زیـادی بدست می‌آید که ما بیش از این به‌آنها نمی‌پردازیم.



شکل ۲۵

یکی ازحالتهای خاصی که همیشه قابل حل‌است معادلهٔ به صورت $\cos n(x+h)=k$ درحالت $n=2$ می‌باشد که به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A\cos^2 x+B\sin x\cos x+C\sin^2 x=D \qquad (11)$$

که با استفاده از رابطه‌های تبدیل $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ به $\cos 2x$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \text{ و } \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

به‌صورت زیر در می‌آید:

$$(A-C)\cos 2x+B\sin 2x+A+C-2D=0$$

که همان معادلهٔ $'$(۴) است.

تبصره ـ چون $\cos 2x$ و $\sin 2x$ نسبت به tgx عبارتهای گویایی هستند، بهتر است معادلهٔ(۱۱) را باتقسیم دوطرف آن بر $\cos^2 x$ به‌صورت زیر بنویسیم:

$$C tg^2 x+B tg x+A=D(1+tg^2 x)$$

که معادلهٔ درجهٔ دومی نسبت به tgx است و به خصوص در مواردی که A، B، C و D ضریبهای پارامتری باشند، کار را برای بحث ساده‌می‌کنند.

۳. معادله‌های غیرمشخص

بررسی عمومی. ـ وقتی‌که معادله‌ای به‌هیچیك از حالتهای پیش تبدیل نشود (ویا بلافاصله و به‌سهولت به‌آنها تبدیل نشود) نمی‌توان‌راه حلهای منجزی برای آنها ذکر کرد. معهذا اگر معادله به صورت زیر باشد:

$$P(\cos x, \sin x, \cos ax, \cos bx, \dots, \sin a'x, \sin b'x, \dots)=0$$

(P یك چند جمله‌ای است)، اگر ضریبهای a، b، ...، a'، b'و... کسری باشند، می‌توان‌آنها را به‌یك مخرج تبدیل‌کرد ومعادله را به‌صورت زیر درآورد:

$$P\left[\cos\frac{Nx}{N}, \sin\frac{Nx}{N}, \cos A\frac{x}{N}, \cos B\frac{x}{N}, \ldots, \sin A'\frac{x}{N}, \sin B'\frac{x}{n}, \ldots\right]=0$$

واکنون اگر $tg\frac{x}{2N}=t$ فرض کنیم، تمام جمله‌ها نسبت به t گویاخواهند بود ومی‌توان معادله‌را به‌صورت $\varphi(t)=0$ تبدیل کرد که یك معادلهٔ جبری است.

این روش ازلحاظ نظری راه حل اساسی وعمومی است، زیراامکان حل اینگونه معادله‌ها را بدست می‌دهد، معهذا ازنظرعمل، تنها یك‌راه‌حل اضطراری به‌شمار می‌رود، عملها، اغلب مفصل وملال‌انگیز است ودرجهٔ معادله بـه علت تغییر مجهول $tg\frac{x}{2N}=t$ دوبرابرمی‌شود(وما این‌مطلب را درمورد معادلهٔ'(۴) دیدیم که پس ازتغییر مجهول به‌یك معادلهٔ درجه دوم تبدیل شد.) بنابراین قبل از اینکه بـه‌این روش متوسل شویم باید تمام راه حلهای ممکنهٔ دیگررا موردآزمایش قراردهیم وسپس اگر راهی بدست نیامد از تغییر مجهول t استفاده‌کنیم.

مثلاً می‌توان تحقیق کرد که آیا چند جمله‌ای نمی‌تواند نسبت به یکی ازمجهولهای $\sin x$،$\cos x$ ویا $tg x$ به‌صورت عبارتی‌گویا بیان شود. اگر یـك چند جمله‌ای، بـا تغییر x به $\pi+x$، تغییر نکند و بـا تبدیل x به $-x$ تغییرعلامت بدهد به‌معنای آنست که می‌توان چند جمله‌ای را به‌صورت گویا برحسب $tg x=t$ نوشت.

اگر چند جمله‌ای P با تغییر علامت x تغییرعلامت بدهد، ولی با تبدیل x به $\pi-x$ تغییر نکند، می‌تواند به‌صورت چند جمله‌ای گویائی از $\sin x=s$ نوشته شود.

و بالاخره اگر P با تغییر علامت x تغییر نکند ولی با تبدیل x به $\pi-x$ تغییر علامت بدهد، قابل بیان به وسیلهٔ یك چندجمله‌ای بر حسب $\cos x=c$ می‌باشد. همچنین بسیاری از حالتهای خاص معادله‌هارا می‌توان با بعضی حیله‌های محاسبه‌ای حل کرد. و به‌طورکلی وقتی که معادله باید به‌ازای مقادیری برابر صفر شود، به‌معنای آنست که احتمال تبدیل آن به‌صورت ضرب عاملها وجود دارد.

۴. دستگاه معادله‌ها

حالا نوبت‌آنست به‌دستگاه چند معادلهٔ چند مجهولی بپردازیم. ما تنها به‌حالت دومعادلهٔ دومجهولی می‌پردازیم (که مثلاً درحل‌مثلث فوق‌العاده مهم‌است) و به‌خصوص دستگاههای دومجهولی‌که مجهولهای آنها با تقریب یك علامت نسبت به‌هم متقارن باشند.

در اینصورت همیشه‌کوشش می‌کنیم که حل دستگاه مثلثاتی را به‌حل دستگاه ساده جبری زیر منجر کنیم:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

روش‌کار را ضمن چند تمرین مشخص می‌کنیم:

$$(1)\qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \sin x+\sin y=a \end{cases}$$

معادلهٔ دوم را می‌توان چنین نوشت:

$$۲\sin\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}=a$$

و یا:

$$\cos\frac{x-y}{۲}=\frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

اگر Θ یکی از زاویه‌هایی باشد که کسینوس آن برابر $\frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$ باشد خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{۱}{۲}(x-y)=۲k\pi\pm\Theta\\ \frac{۱}{۲}(x+y)=\frac{\alpha}{۲}\end{cases}$$

و از آنجا:

$$\begin{cases}x=۲k\pi\pm\Theta+\frac{\alpha}{۲}\\ y=۲k\pi\mp\Theta+\frac{\alpha}{۲}\end{cases}$$

با شرط $\left|\frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}\right|<۱$

۲) همچنین دستگاه زیر را هم که مورد نیاز است (فصل ۸ شماره ۱) ذکر می‌کنیم:

$$\begin{cases}x+y=a+b\\ \frac{\sin x}{\sin a}=\frac{\sin y}{\sin b}\end{cases}$$

معادلهٔ دوم را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin a+\sin b}=\frac{\sin x-\sin y}{\sin a-\sin b}$$

ویا:

$$\frac{۲\sin\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}}{۲\sin\frac{x-y}{۲}\cos\frac{x+y}{۲}}=\frac{۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}}{۲\sin\frac{a-b}{۲}\cos\frac{a+b}{۲}}$$

یا:

$$tg\frac{x+y}{۲}\ cotg\frac{x-y}{۲}=tg\frac{a+b}{۲}\ cotg\frac{a-b}{۲}$$

یا:

$$cotg\frac{x-y}{۲}=cotg\frac{a-b}{۲}$$

و ازآنجا:

$$x-y=a-b+۲k\pi$$

و در حالت خاصی‌که xوy زاویه‌های یك مثلث باشند، جوابهای دستگاه مفروض $x=a$ و $y=b$ می‌شود.

٦

روابط بین زاویه‌ها وضلعهای مثلث

(حالتهای کلاسیک حل مثلث)

درمثلث ۶ جزء وجوددارد. سه‌زاویه وسه‌ضلع. در هندسهٔ‌مقدماتی دیده‌ایم که سه‌جزء از این شش جزء (به‌شرطی که هر سه، زاویه نباشند) می‌توانند مثلث را کاملا مشخص کنند، تنها یك حالت وجود داردکه با سه جزء مفروض دو مثلث بدست می‌آید (و بـه‌همین علت، آنرا حالت «مشکوك» می‌نامند).

باداشتن سه زاویه، نمی‌توان مثلث را معین کرد. در حقیقت اگر سه‌زاویه AوBوC آزادانه اختیارشوند، هیچ مثلثی‌جواب مساله‌نخواهد بود، زیرا مجموع زاویه‌های هـر مثلث، برابر با دو قائمه است (نتیجهٔ مستقیم اصل موضوع اقلیدس) و اگر سه‌زاویه چنان داده شده باشد که مجموع آنهابرای‌دوقائمه‌شود، بازهم‌مثلث‌ازلحاظ‌اندازهٔ‌ضلعهای‌آن‌معین نمی‌شود (تنها شکل‌آن‌مشخص می‌شود)، زیرا در اینحالت مثل‌اینست‌که تنها دو زاویهٔ مثلث را داده بـاشند (که در اینصورت زاویهٔ سوم خود به‌خود بدست‌می‌آید) وبرای اینکه مساله‌ممکن باشد جزء دیگری ازمثلث هم لازم است.

این نمونهٔ ساده‌ای ازاین مطلب‌بودکه سه فرض غیرمستقل معادل با دو فرض است. درحالت عمومی بـرای اینکه یك مساله با چند فرض قابل حل باشد، قبلا باید اطمینان حاصل کردکه فرضهای مساله مستقل ازیکدیگر باشند، یعنی‌هیچ‌رابطه‌ای‌بین‌آنها وجود نداشته باشد. (شناخت

استقلال فرضها یکی از مساله‌های دشوار ریاضیات است).

بنابراین وقتی که صحبت از «سه‌جزء» یا «چهار جزء» در مثلث می‌کنیم، خود به‌خود متضمن این مطلب است که حداکثر دو زاویه‌می‌تواند بین این اجزاء وجود داشته باشد.

به‌این ترتیب اگر سه‌جزء مثلث داده شده باشد (که لااقل یکی‌از آنها ضلع خواهد بود)، مثلث ازنظر هندسی قابل رسم است و بنابراین سایر اجزاء مثلث هم قابل محاسبه هستند. از اینجا لزوم رابطه‌هایی بین ضلعها و زاویه‌های مثلث‌احساس می‌شود که به‌یاری آنها بتوان‌این محاسبه را انجام داد.

۱. جستجوی رابطه‌های بین ضلعها و زاویه‌های مثلث

بین سه‌جزءازیك‌مثلث هیچ‌رابطه‌ای‌وجود ندارد زیرا اگررابطه‌ای مثل $f(A،b،c)=0$ وجود داشته باشد، در اینصورت می‌توان‌بااستفاده از این تابع یکی از سه‌جزء را برحسب دوتای دیگر بدست‌آورد واین به معنای آنست‌که باید بتوان تنها با دوجزء، مثلث را ساخت؛ درحالیکه در هندسه دیده‌ایم‌که چنین چیزی ممکن نیست.

برعکس بین چهار جزء مثلث مسلماً رابطه‌ای وجود دارد، ولی بین ۴ جزء هم هرگز دو رابطه وجود نخواهد داشت، زیرا اگر مثلاً داشته باشیم:

$$\begin{cases} f(a،b،c،A)=0 \\ g(a،b،c،A)=0 \end{cases}$$

می‌توان مثلا A را از اولی استخراج کرد و در دومی قرارداد و در اینصورت رابطه‌ای بین سه‌جزء مثلث بدست می‌آید که دیدیم غیر ممکن است. بنابراین، باید تنها به جستجوی رابطه‌هایی از نوع $f(a,b,c,A)=0$ برویم که از وجودآنها مطمئن هستیم (تنها یك‌رابطه بین هرچهار جزء مشخص مثلث وجود دارد.)

بین پنج‌جزء یك مثلث چند رابطه‌وجود دارد؟ با اطمینان‌می‌توان گفت‌که لااقل دو رابطه، زیرا اگر بین پنج جزء مثلث تنها یك رابطه وجود داشته باشد به‌معنای اینست‌که با انتخاب چهار جزء دلخواه برای مثلث، باید بتوان آنرا رسم کرد، در حالیکه هندسه به‌ما آموخته است که چنین چیزی ممکن نیست. بنابراین بین پنج جزء هرمثلث لااقل دو رابطه وجود دارد، ولی‌وقتی‌که دو رابطه بین اجزائی وجود داشته‌باشد، مسلماً تعداد رابطه‌های بین‌آنهابینهایت خواهد شد: مثلا فرض‌کنید بین ۵ جزء، دو رابطهٔ $f(a,b,c,A,B)=0$ و $g(a,b,c,A,B)=0$ وجود داشته باشد، در اینصورت اگر بین این دو رابطه یك ترکیب خطی‌ایجاد کنیم $\lambda f+\mu g=0$ را بدست خواهیم‌آورد که رابطهٔ جدیدی بین ۵ جزء خواهد بود (λوμ ضریبهای‌غیرمشخصی هستند که می‌توانند شامل‌اجزاء پنجگانه هم باشند). به این ترتیب، بین ۵ جزء مثلث می‌توان بینهایت رابطه بدست‌آوردوبه‌همین مناسبت ما واردبحث دراین مساله که‌متضمن هیچ مفهوم دقیقی نیست، نمی‌شویم.

با توجه به‌آنچه‌گفته شد نتیجه می‌گیریم که باید تنها رابطه‌هایی را که بین چهار جزء مثلث وجود دارد، جستجو کنیم. به‌این ترتیب برای حالتهای مختلفی که در هندسه می‌توان مثلث را بدست آورد،

حالتهای مختلف «تساوی» پیداخواهیم کرد وبرای زاویه‌ها، چه‌زمانی که معلوم باشند وچه‌زمانی که‌مجهول‌اند، آنهارا به‌وسیلهٔ خطوط‌مثلثاتیشان نشان خواهیم داد.

حالت تساوی .ـ یك‌ضلع (مثلا a) و دوزاویـهٔ مجاور به‌آن (BوC) مفروض است. شرط اول مفروضات اینست‌که $B+C<\pi$ باشد و در اینصورت زاویـهٔ سوم بلافـاصلـه از رابطـهٔ $A=\pi-B-C$ بدست می‌آید.

چنین مثلثی را چگونه می‌سازیم: رأس مجهول A نقطهٔ برخورد دو خط ABوCA است که امتداد آنها برای ما معلوم است؛ A روی BA قراردارد وفاصله‌اش از BC (ارتفاعی‌که ازرأس A می‌گذرد)برابر است با: $h=c.\sin B$ ؛ همچنین از آنجاکـه A روی CA هـم هست، می‌توان نتیجه‌گرفت: $h=b\sin C$ و بنابراین داریم:

$$b\sin C=c\sin B$$

اگرزاویهٔ B یا C منفرجه هم‌باشند بازهمین نتیجه بدست‌می‌آید. این رابطه را می‌توان به‌صورت زیرهم نوشت:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

واین رابطه‌ای بین ۴ جزء مثلث است وبنابراین ازهمان رابطه‌هایی‌است که ما درجستجوی آن بودیم. روشن است کـه به‌همین ترتیب می‌توان دو رابطهٔ مشابه دیگر را نیز بدست‌آورد:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}, \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

این رابطه‌ها همراه با رابطهٔ $A+B+C=\pi$، رابطه‌های گروه اول نامیده می‌شوند:

$$(I)\begin{cases}\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C} \\ A+B+C=\pi\end{cases}$$ (رابطه‌های سینوسها)

باکمك رابطه‌های (I) می‌توان با در دست داشتن سه‌جزء مثلث، سه‌جزء دیگر را بدست‌آورد. این رابطه‌ها در حقیقت تعبیر مثلثاتی حالت اول تساوی مثلثها می‌باشد.

متقابلاً می‌توان ثابت‌کردکه وقتی مقادیر مثبت a،b،c،A،B وC در رابطه‌های (I) صدق‌کنند، اجزاء یك مثلث هستند.

درواقع‌می‌توان بازاویه‌های AوBوC ومثلاضلع a مثلثی‌ساخت. در اینصورت از رابطه‌های

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b'}{\sin B}=\frac{c'}{\sin C}$$

نتیجه می‌شودکه الزاماً باید داشته باشیم:

$$b=b' \text{ و } c=c'$$

تبصره . ـ a) به‌سادگی می‌توان ثابت‌کردکه مقدار مشترك $\frac{a}{\sin A}$ در مثلث ABC دارای‌مفهوم‌ساده‌ای است. اگر روی دایرهٔ محیطی‌مثلث ABC زاویهٔ رأس A را جا به‌جا کنیم، طوری‌که ضلع BC ثابت‌باشد، مقدارزاویهٔ A تغییرنمی‌کند، A را به‌وضع A_1 در می‌آوریم به‌طوریکه

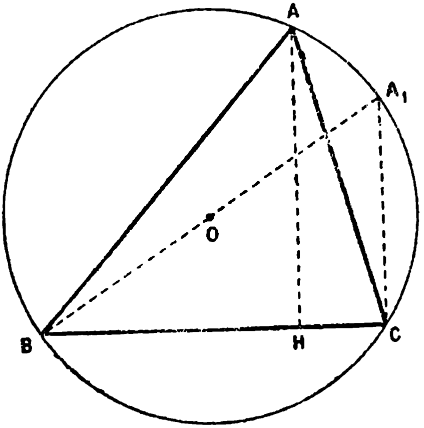
زاویهٔ $BCA_۱$ قائمه شود (شکل ۲۶)، در اینصورت خواهیم داشت:

$$sin A_۱ = \frac{BC}{۲R} = \frac{a}{۲R} = sin A$$

یعنی مقدار مشترك نسبتها برابر با قطر دایرهٔ محیطی مثلث‌است.

b) ضمن‌اثبات این رابطه‌ها، ضمناً‌ارتفاع h که از رأس Aعبور کرده نیز محاسبه شد:

$$h = c.sin B = b.sin C$$



شکل ۲۶

و به‌این ترتیب مساحت مثلث هم‌چنین می‌شود:

$$S = \frac{۱}{۲}ah = \frac{۱}{۲}a.c.sin B = \frac{۱}{۲}a.b.sin C$$

روشن است که مقدار مساحت را به‌صورت $\frac{۱}{۲}b.c.sin A$ و یا $\frac{a.b.c}{۴R}$ هم

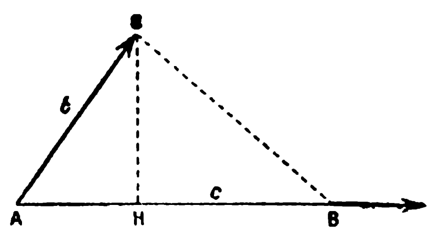
می‌توان نوشت.

حالت دوم تساوی . — دوضلع c وb و زاویهٔ بین آنها یعنی A داده شده و می‌خواهیم ضلع سوم را حساب کنیم، بردار $\overrightarrow{AC}$ را روی محوری که از AB عبور کرده و جهت آن از A به B است تصویر می‌کنیم، اگر H پای ارتفاع وارد از رأس C بر AB باشد داریم:

$$BH = |c - b\cos A| \quad \text{و} \quad CH = b\sin A$$

و از آنجا:

$$a^{2} = \overline{BC}^{2} = \overline{BH}^{2} + \overline{CH}^{2} = (c - b\cos A)^{2} + b^{2}\sin^{2}A =$$
$$= b^{2} + c^{2} - 2bc\cos A$$



شکل ۲۷

به‌این‌ترتیب دستهٔ دوم رابطه‌ها بین چهار جزء مثلث [تمام رابطه‌ها به صورت $f(a,b,c,A) = 0$] بدست می‌آید.

$$(\mathrm{II})\begin{cases} a^{2} = b^{2} + c^{2} - 2bc\cos A \\ b^{2} = c^{2} + a^{2} - 2ca\cos B \\ c^{2} = a^{2} + b^{2} - 2ab\cos C \end{cases}$$

متقابلا اگر ۶ مقدار مثبت a، b، c، A، B و C (باشرط A و B و $C < \pi$) در رابطه‌های (II) صدق کنند می‌توانند اجزاء یك مثلث باشند. در حقیقت از رابطه‌های بالا به‌سادگی بدست می‌آید:

$$a^۲ < b^۲ + c^۲ + ۲bc$$

و از آنجا:

$$a < b + c \text{ و } b < a + c \text{ و } c < a + b$$

بنابراین، با سه‌طول a و b و c می‌توان یك مثلث ساخت. درهندسه‌دیده‌ایم واز اینجا به‌سادگی روشن است‌که‌سه نامساوی فوق می‌توانندبه‌صورت دونامساوی زیر نوشته شوند:

$$|b - c| < a < b + c$$

(ویا نامساویهای شبیه آن که از تبدیل دوری این دو نامساوی بدست می‌آیند).

این دو نامساوی را از رابطه‌های دستهٔ (II) هم می‌توان بدست آورد، زیرا به‌سادگی‌می‌توان نوشت:

$$a^۲ \geqslant b^۲ + c^۲ - ۲bc$$

حالا مثلثی با ضلعهای a و b و c می‌سازیم، مقادیر $\cos A'$، $\cos B'$ و $\cos C'$ که در این مثلث بدست می‌آیند، با مقادیر $\cos A$، $\cos B$ و $\cos C$ که از رابطه‌های (II) نتیجه می‌شوند، متحد خواهند بود و چون داریم: $\pi >$ A و B و C $>$ ۰ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$A = A' \text{ و } B = B' \text{ و } C = C'$$

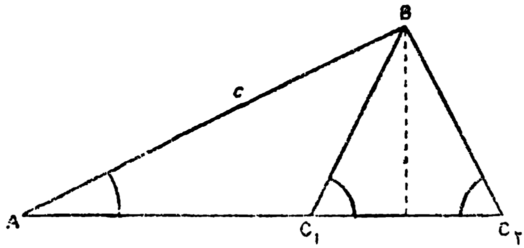
حالت سوم تساوی . — سه ضلع مثلث مفروض است. دراینصورت سه زاویه ازهمان رابطه‌های (II) بدست می‌آیند. و به‌این ترتیب باکمك حالت سوم، رابطه‌های جدیدی بدست نمی‌آید.

حالت چهارم تساوی . — دوضلع و زاویه‌ای که بین آنهانیست، مفروض است: مثلا ضلعهای b و a و زاویهٔ A. درهندسه دیده‌ایم که در این حالت دو مثلث بدست خواهد آمد و بنابراین، نمی‌توان رابطهٔ بین آنها را به‌وسیلهٔ یك تساوی مشخص کرد. یعنی این حالت، حالت مبهمی است. برای ساختن مثلث در اینحالت، AB و زاویه A را رسم می‌کنیم، دو مثلث ABC_1 و ABC_2 جوابهای مساله‌اند (شکل ۲۸).

از رابطه‌های دستهٔ (I) داریم: $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ وبنابراین، مقدار $\sin C$ بدست می‌آید (به‌شرطی که $\frac{c}{a}\sin A < 1$ باشد) که ازآنجا دوجواب مکمل هم برای زاویهٔ C معین می‌شود. ازاین حالت هم رابطه‌های جدیدی درمثلث بدست نمی‌آید.

به‌این ترتیب به‌وسیلهٔ (I) رابطه‌هایی به‌صورت $f(a,b,A,B) = 0$ و به‌وسیلهٔ (II) رابطه‌هایی به‌صورت $f(a,b,c,A) = 0$ بدست آوردیم، حالا رابطه‌هایی را جستجو می‌کنیم که به‌صورت $f(a,b,A,C) = 0$ باشند (یعنی رابطه‌های بین دوضلع و دو زاویه، به‌شرطی که هر دوزاویه همنام دوضلع نباشند).

رابطهٔ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ را می‌توان به‌صورت $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin(A+C)}$ نوشت که همان رابطهٔ مورد جستجو است.



شکل ۲۸

به‌این ترتیب، مساله به‌طورکامل حل شد.

۲. هم‌ارز بودن دو دستگاه

همانطورکه دیدیم هر دودستگاه رابطه‌ها، می‌توانند عنصرهای‌یك مثلث را مشخص‌کنند، اگر ۶ مقدار دریکی از دو دستگاه صدق‌کنند در دستگاه دیگر هم صدق خواهند کرد. مثلا اگر a،b،c،A،BوC در (I) صدق کنند، یك مثلث را مشخص خواهند کرد، که این ۶ مقدار اجزاء آن هستند ودر چنین مثلثی رابطه‌های (II) هم صادق خواهد بود.

این مطلب به‌معنای آنست‌که اگر به‌کمك هریك از دو دستگاه رابطه‌های (I) و (II)، اجزاء مثلث را به‌صورت تابعهایی‌ازسه‌جزء مثلث بدست‌آوریم(به‌شرطی که‌این‌سه‌جزء زاویه نباشند)، بین a،b،c،A،BوC اتحادها ونامساویهای معادلی بدست می‌آید. معادل بودن این‌دودستگاه باید این امکان را به‌وجود آوردکه بتوان رابطه‌های (I) را ازرابطه‌های (II) نتیجه‌گرفت و برعکس.

a) (I) نتیجهٔ (II) .ـــ رابطه‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \qquad (1)$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \qquad (2)$$

وکوشش می‌کنیم رابطه‌ای به‌صورت $f(a,b,A,B)=0$ از آنها استخراج کنیم، که در اینصورت باید الزاماً رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ بدست آید.

برای این‌منظوربین رابطه‌های(۱)و(۲) مقدار c را حذف‌می‌کنیم. حل این دو معادلهٔ درجه‌دوم حذف را ممکن می‌سازد، ولی می‌توان به طریق خیلی ساده‌تر و بدون حل آنها نتیجه را بدست آورد. از جمع رابطه‌های (۱) و(۲) داریم:

$$c=b\cos A+a\cos B \qquad (3)$$

و ازکم‌کردن آنها از یکدیگر:

$$c(a\cos B-b\cos A)=a^2-b^2 \qquad (4)$$

واکنون اگر c را از رابطهٔ (۳) بدست آورده ودر رابطهٔ (۴) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$b^2-a^2=b^2\cos^2 A-a^2\cos^2 B$$

و یا:

$$a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A$$

و ازآنجاکه بامقادیر مثبت سروکار داریم:

$$a\sin B=b\sin A \qquad (5)$$

برای اینکه به‌طورکامل رابطه‌های (I) را بدست‌آوریم. باید ثابت‌کنیم که $A+B+C=\pi$ است. رابطهٔ(۳) راباتوجه به‌رابطهٔ(۵) ورابطه‌های نظیرآن می‌توان چنین نوشت:

$$\sin C = \sin B \cos A + \sin A \cos B = \sin(A+B)$$

که درآن $0 < \sin C$ و $A+B < 2\pi$ هستند. بنابراین از تساوی بالا یکی از دو رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$C = A+B \quad \text{یا} \quad C = \pi - A - B$$

ولی به همین ترتیب می‌توانیم رابطه‌های $\sin B = \sin(A+C)$ و $\sin A = \sin(B+C)$ را بدست آوریم واگر $A+B+C$ مخالف با 2π باشد، باید داشته باشیم:

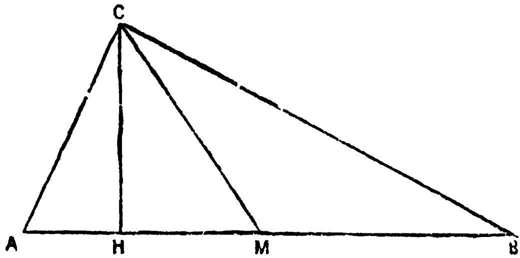
$$B+C=A \text{ و } C+A=B \text{ و } A+B=C$$

یعنی: $$A=B=C=0$$

واین با فرضی که در ابتدا داشتیم متناقض است. بنابراین جواب $A+B=C$ قابل قبول نیست وداریم:

$$A+B+C=\pi$$

به‌این ترتیب توانستیم رابطه‌های (I) را با فرض رابطه‌های (II) ثابت‌کنیم. در این اثبات ضمناً به‌رابطه‌هایی برخورد کردیم که بین پنج جزء مثلث وجود داشت: معادله‌های (۳) و (۴). این رابطه‌ها مفهوم هندسی ساده‌ای دارند، رابطهٔ اول به‌این معناست‌که مجموع تصویرهای دوضلع یك مثلث روی ضلع سوم‌برابر باضلع سوم است ورابطهٔ دوم‌یعنی اختلافات مربعهای دوضلع، $BC^2 - AC^2$، ازلحاظ‌قدرمطلق، برابراست باحاصلضرب $2AB \times HM$ (M وسط ضلع AB و H پای ارتفاع‌وارد براین ضلع است) (شکل۲۹).



شکل ۲۹

این دو رابطه نمونه‌های جالبی از رابطه‌های بین ۵ جزء مثلث هستند (وهمانطورکه قبلاگفتیم تعداد این‌رابطه‌ها نامحدود است) وتنها معرف خاصیتی ازمثلث هستند.

b) (II) نتیجهٔ (I). ــ باید ازدستگاه (I) رابطه‌ای بین‌یك‌زاویه و سه ضلع مثلث بدست آوریم. از رابطهٔ $C=\pi-A-B$ نتیجه می‌گیریم:

$$c\sin A=a\sin(A+B) \qquad (۶)$$

و یا:

$$a\sin A\cos B+a\sin B\cos A=c\sin A$$

ویا با توجه به‌رابطهٔ $a\sin B=b\sin A$ داریم:

$$\sin A(a\cos B+b\cos A)=c\sin A$$

و چون $\sin A\neq ۰$ است، به‌سادگی به‌رابطهٔ (۳) می‌رسیم که ضمن عبور از (II) به (I) به‌آن رسیدیم وآنرا تفسیر هم کردیم. اگر رابطه‌های‌نظیر رابطهٔ (۳) را هم درنظر بگیریم، دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} c=a\cos B+b\cos A & (۳) \\ a=b\cos C+c\cos B & (۳)' \\ b=c\cos A+a\cos C & (۳)'' \end{cases}$$

اکنون اگر ترکیب خطی زیر را بدست‌آوریم:

$$c\times(۳)-a\times(۳)'-b\times(۳)''$$

یکی از رابطه‌های دستگاه (II) بدست خواهد آمد ودو رابطهٔ دیگر هم‌به‌همین ترتیب بدست می‌آید. بایدبه‌این‌نکته توجه‌کردکه دراین‌حالت نمی‌توان نامساوی زیر را بدست‌آورد:

$$0 < A، B، C < \pi$$

به‌این ترتیب دستگاه (I) دستگاه (II) را نتیجه می‌دهد، ولی از دستگاه (II) به‌طور مشروط می‌توان به‌دستگاه (I) رسید.

تبصره . ـ رابطه‌های (۳) در اثبات هم‌ارز بودن دو دستگاه نقش اساسی به‌عهده‌داشتند وبعضی از مؤلفین به‌همین دلیل وبه‌خاطر سادگی این‌رابطه‌ها، آنها را درردیف دستگاه‌های اصلی (I) و(II)قرارداده‌اند، ولی‌ما تأکید می‌کنیم‌که تنها رابطه‌های (I) و (II) بین چهارجزء مثلث، رابطه‌های اصلی هستند.

حالت مثلث قائم‌الزاویه . — اگر یکی از زاویه‌های مثلث، و مثلا زاویهٔ A، قائمه باشد، دو زاویهٔ دیگر B وC متمم یکدیگر می‌شوند ودستگاه (I) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$b=a\sin B=a\cos C$$

$$c=a\cos B=a\sin C$$

و از تقسیم این رابطه‌ها بریکدیگر، خواهیم داشت:

$$\frac{b}{c}=tg B=cotg C$$

دستگاه (II) به رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ (که همان رابطهٔ فیثاغورث است)

منجر می‌شود. این رابطه‌ها منجر به‌سه رابطهٔ سادهٔ زیر می‌شود:

$$b=a\sin B \text{ و } c=a\sin C \text{ و } B+C=\frac{\pi}{2}$$

۳. حل مثلث

حل یك مثلث، یعنی محاسبهٔ ضلعها وزاویه‌های آن. برای اینکه بتوانیم با فرضهایی، این ۶ جزء را محاسبه کنیم باید ۶ معادله داشته باشیم. دیدیم که بین اجزاء یك مثلث سه‌رابطه وجود دارد؛ بنابراین، باید شرطهای مفروض مساله چنان باشدکه بتوان سه‌معادلهٔ دیگرتشکیل داد (معادله‌هایی‌که منجر به‌سه رابطهٔ قبل نشوند). همچنین، ممکن‌است اندازهٔ سه‌مقدار مربوط به مثلث معلوم باشد (مثلاً مساحت، یکی از ارتفاعها وشعاع دایرهٔ محیطی) ویا یك مقدار و دونسبت (مثلاً مثلثی که یك ضلع آن‌مفروض است ومی‌دانیم‌که یکی از دو زاویهٔ آن‌دوبرابر یکی دیگر از زاویه‌ها است ودو نیمساز خارجی آن نیز با هم برابرند). همانطورکه قبلا هم‌گفتیم این سه‌فرض نباید فقط زاویه ویا رابطه‌های همگنی بین مقادیر مربوط به مثلث باشند، زیرا در اینصورت بینهایت مثلث متشابه‌خواهیم داشت‌که فرضهای مساله در همهٔ‌آنها صدق‌می‌کند.

همچنین باید توجه داشت‌که سه‌فرض (مقادیر ویا نسبتها)مستقل ازیکدیگر باشند والا مثلث مشخص‌نخواهد شد. مثلاً اگر A و a وشعاع R از دایرهٔ محیطی داده شده باشد، در حقیقت بیش از دو مقدار معلوم

نیست، زیرا می‌دانیم که $2R=\frac{a}{\sin A}$؛ یعنی R با کمك a و A بدست می‌آید وبنابراین منجر به‌دوفرض می‌شود که برای حل مثلث کافی نیست. همانطورکه قبلا هم یادآوری کردیم شناسائی استقلال فرضها، مسالهٔ خیلی مشکلی است.

ساده‌ترین فرضهای ممکن، برای حل مثلث، زاویه‌ها و ضلعهای آن می‌باشد ودر اینصورت آنها را حالتهای کلاسیك حل مثلث گویند.

حل کلاسیك . — چهار حالت کلاسیك حل مثلث وجود دارد که با چهار حالت تساوی مثلثها تطبیق می‌کند.

۱) a وB وC مفروض‌اند و A وb وc مجهول (حالت اول).

ضمن پیداکردن رابطه‌های اصلی دیدیم که اینحالت مستقیماً به دستگاه (I) منجرمی‌شود وطبیعی است که‌جوابهاازهمین‌رابطه‌ها به‌سادگی بدست می‌آید، زیرا داریم:

$$A=\pi-(B+C);b=a\frac{\sin B}{\sin A};c=a\frac{\sin C}{\sin A}$$

بحث: شرط‌لازم‌وکافی‌برای‌داشتن‌جواب‌اینست که $0 < B+C < \pi$ باشد.

۲) b وc وA مفروض‌اند و B وC وa مجهول (حالت دوم).

این حالت منجر به دستگاه (II) می‌شود و بلافاصله جوابها از دستگاه (II) بدست می‌آید:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

و از آنجا $\frac{a}{sinA}$ و سپس $sinB$ و $sinC$ محاسبه می‌شود.

ولی این‌رابطه‌ها قابل محاسبهٔ لگاریتمی‌نیستند و به‌همین‌مناسبت رابطه‌های دیگری برای‌این محاسبه لازم به‌نظر می‌رسد.

عموماً دستگاه (I) بردستگاه (II) ترجیح دارد، زیرا در دستگاه (I) محاسبهٔ روی زاویه‌ها انجام می‌گیرد وبنابراین، ساده‌تر ومثلثاتی‌تر است. در حالت مورد بحث، مجموع $B+C$ دو زاویهٔ مجهول برابر $\pi-A$ است. وقتی‌که مجموع دو زاویه معلوم باشد، همیشه بهتراست که تفاضل آنها را هم محاسبه کنیم، که ازآنجا به سادگی هریك از دو زاویه محاسبه شوند. b وc معلوم بود وبنابراین از دستگاه (I) داریم:

$$\frac{sinB}{sinC}=\frac{b}{c}$$

و یا:

$$\frac{sinB+sinC}{sinB-sinC}=\frac{b+c}{b-c}$$

نسبت طرف اول تساوی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{sin\frac{B+C}{۲}cos\frac{B-C}{۲}}{sin\frac{B-C}{۲}cos\frac{B+C}{۲}}=cotg\frac{A}{۲}cotg\frac{B-C}{۲}$$

و به‌این ترتیب، تفاضل $B-C$ از معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$tg\frac{B-C}{۲}=\frac{b-c}{b+c}cotg\frac{A}{۲}$$

اگر φ را قوسی واقع بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $+\frac{\pi}{۲}$ فرض کنیم به‌نحوی که داشته باشیم:

$$tg\varphi=\frac{b-c}{b+c}cotg\frac{A}{۲}$$

از دستگاه:

$$\begin{cases}B+C=\pi-A\\B-C=۲\varphi\end{cases}$$

مقادیر B و C بدست می‌آید:

$$\begin{cases}B=\frac{\pi}{۲}+\varphi-\frac{A}{۲}\\C=\frac{\pi}{۲}-\varphi-\frac{A}{۲}\end{cases}$$

بحث: a) اولا باید $\pi > B > ۰$ باشد، یعنی:

$$۰<\frac{\pi}{۲}+\varphi-\frac{A}{۲}<\pi$$

با توجه به‌اینکه $\pi > A$ می‌باشد، نامساوی اول‌بالا همیشه‌برقرار است، وچون φ بین $\frac{\pi}{۲}-$ و $\frac{\pi}{۲}+$ و $۰ < A$ است، نامساوی دوم هم برقرار است.

b) باید $۰ > C$ یعنی $\varphi > \frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}$ ویا $tg\varphi < cotg\frac{A}{۲}$ باشد، یعنی باید داشته باشیم $۱ > \frac{b-c}{b+c}$ و این نامساوی هم همیشه برقرار است.

بنابراین، در اینحالت همیشه دارای جواب خواهیم بود.

۳) a و b و c معلوم و A و B و C مجهول‌اند (حالت سوم).

در اینحالت با توجه به‌اینکه هیچکدام از زاویه‌ها معلوم نیست،

ناچاریم که از دستگاه (II) شروع کنیم. مثلازاویهٔ A بلافاصله از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\cos A=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}$$

و برای اینکه این رابطه را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنیم می‌نویسیم:

$$1+\cos A=2\cos^{2}\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^{2}-a^{2}}{2bc}=$$
$$=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}$$

همچنین

$$1-\cos A=2\sin^{2}\frac{A}{2}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

و برای اینکه رابطه به‌صورت ساده‌تری نوشته شود، فرض می‌کنیم:

$$a+b+c=2p$$

در اینصورت به‌وسیلهٔ یکی از دورابطهٔ بالا، که قابل محاسبهٔ لگاریتمی هستند، زاویهٔ A بدست‌می‌آید، معمولا نسبت این رابطه‌را در نظرمی‌گیرند و رابطهٔ عملیتر زیر را بدست می‌آورند:

$$tg^{2}\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$ (برای محاسبهٔ زاویه A) (۵)

وبه‌همین ترتیب، مـی‌توان B وC را نیز محاسبه کـرد. پس از محاسبهٔ زاویه‌ها، باید جوابها در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$A+B+C=\pi$$

بحث: عبارت $tg^2\frac{A}{2}$ باید مثبت باشد و بنابراین، داشته باشیم:

$$p(p-a)(p-b)(p-c)>0$$

p مثبت است و در نتیجه نامساوی بالا منجر به $p>a$ و $p>b$ و $p>c$ و یا $a<b+c$ و $b<c+a$ و $c<a+b$ می‌شود. و همانطور که میدانیم اینها شرطهای لازم و کافی برای ساختن مثلث، وقتی که ضلعهای آن معلوم‌اند، می‌باشد.

۴) a و b و A معلوم و c و B و C مجهول‌اند (حالت مبهم).

از دستگاه (I) داریم:

$$\sin B=\frac{b}{a}\sin A \text{ و سپس } C=\pi-(A+B)$$

بحث: مقدار مثبت $\frac{b}{a}\sin A$ که $\sin B$ را مشخص می‌کند، باید از یک کوچکتر باشد.

بنابراین، اگر $\frac{b}{a}\sin A>1$ باشد، مساله جواب نخواهد داشت.

ولی اگر $\frac{b}{a}\sin A<1$ باشد، برای زاویهٔ B دو جواب بدست خواهد آمد، زیرا اگر فرض کنیم: $\frac{b}{a}\sin A=\sin\varphi$ $(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$، می‌توان نوشت:

$$B_1=\varphi \text{ و } C_1=\pi-A-\varphi$$

و یا:

$$B_2=\pi-\varphi \text{ و } C_2=\varphi-A$$

C_1 تنها وقتی قابل‌قبول است که $A+\varphi<\pi$ و یا $A<\pi-\varphi$ باشد.

C_2 هم وقتی وجود دارد که $A<\varphi$ باشد.

بنابراین، اگر A زاویه‌ای حاده باشد، C_1 قابل‌قبول و C_2 به‌شرط $sinA<sin\varphi$ یا $a<b$ قابل قبول است.

اگر A زاویه‌ای منفرجه باشد، C_2 هرگز قابل قبول نیست و C_1 تنها در حالت $sinA>sin\varphi$ یا $a>b$ قابل قبول است.

بنابراین، ۰، ۱ یا ۲ جواب خواهیم داشت و تنها در حالتی که یك جواب داشته باشیم، می‌توان آنرا حالتی از تساوی به‌شمار آورد و این وقتی است که a بزرگتر از b باشد. بنابراین، حالت چهارم را می‌توان اینطور بیان کرد:

دومثلث وقتی برابرند که در دو ضلع و زاویهٔ روبروی به ضلع بزرگتر برابر باشند.

همین حل و بحث را از دستگاه (II) هم می‌توان نتیجه گرفت.

ضلع c ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر است:

$$c^2-2bc\cos A+b^2-a^2=0$$

c مثبت است و بنابراین، تنها جوابهای مثبت قابل قبول است. اگر $0<a<b\sin A$ باشد، مبین معادله منفی شده وجوابی نخواهیم داشت.

اگر $b\sin A<a<b$ باشد، وقتی که A منفرجه است، جواب نداریم و وقتی‌که A حاده است دوجواب داریم.

اگر $a>b$ باشد، تنها یك جواب قابل قبول داریم.

۷

رابطه‌های بین اجزاء فرعی مثلث

(حالتهای غیر کلاسیک حل)

حالتهای غیرکلاسیك حل

وقتی که در حل یك مثلث تمام فرضها از ضلعها و زاویه‌ها انتخاب نشده باشد، آنرا غیرکلاسیك گویند. در اینصورت برای حل مثلث باید از رابطه‌هایی که بین اجزاء ومقادیر مفروض مساله وجود دارد، استفاده کرد. تعداد این رابطه‌ها درمثلث خیلی زیاد است وما تنها ازرابطه‌هایی که بین مقادیر ساده‌تر وجود دارد، نام می‌بریم: شعاعهای دایره‌های مهم (محاطی داخلی و خارجی، محیطی)، ارتفاعها میانه‌ها، نیمسازها و مساحت.

۱. محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی: R

شعاع دایرهٔ محیطی را در رابطه‌های گروه (I) پیدا کرده‌ایم وآن برابر با خارج قسمتی برابر $\frac{a}{۲sinA}$ است. واز همانجا توانستیم رابطه‌ای که به‌مساحت هم مربوط است پیداکنیم:

$$R=\frac{a.b.c}{۴s} \qquad (۱)$$

۲. رابطه‌های بین شعاع دایرهٔ محاطی داخلی وشعاعهای محاطی‌خارجی با مساحت.

روی شکل ۳۰، نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث (نقطهٔ

برخورد نیمسازهای داخلی) و I_A مرکز دایرهٔ محاطی خارجی واقع در زاویهٔ A است، داریم:

$$BP'=BR' \text{ و } CP'=CQ'$$

$$AR'=AB+BR'=AC+CQ'=AQ'$$

و بنابراین:

$$AR'=AQ'=p$$

همچنین داریم: $AR=AQ$ و $BR=BP$ و $CP=CQ$

و باتوجه به‌اینکه

$BP+PC=a$ و $CQ+QA=b$ و $AR+RB=c$

نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} AR=AQ=p-a \\ BP=BR=p-b \\ CQ=CP=p-c \end{cases}$$

اگر $IP=IQ=IR=r$، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی باشد، داریم:

$$tg\frac{A}{۲}=tg\widehat{RAI}=\frac{r}{AR}=\frac{r}{p-a} \qquad (۲)$$

همچنین

$$tg\frac{B}{۲}=\frac{r}{p-b} \text{ و } tg\frac{C}{۲}=\frac{r}{p-c}$$

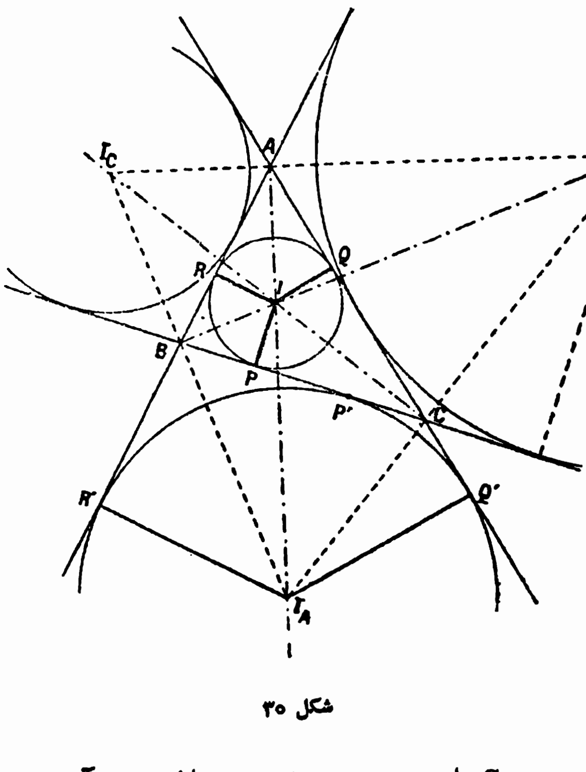
به‌همین ترتیب، می‌توان نوشت:

$$tg\frac{A}{۲}=tg\widehat{R'AI_A}=\frac{R'I_A}{AR'}=\frac{r_a}{p} \qquad (۲)'$$

و شبیه آن:
$$tg\frac{B}{۲}=\frac{r_b}{p} \text{ و } tg\frac{C}{۲}=\frac{r_c}{p}$$

S مساحت مثلث برابر است با مجموع مساحتهای مثلثهای AIB، BIC و CIA، بنابراین

$$S=\frac{۱}{۲}ar+\frac{۱}{۲}br+\frac{۱}{۲}cr=p.r \qquad (۳)$$



شکل ۳۵

همچنین، S را به‌ترتیب زیر نیز می‌توان بدست‌آورد:

$$\text{مساحت}\,ABD=\text{مساحت}\,ABI_A+\text{مساحت}\,ACI_A-\text{مساحت}\,BCI_A$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$S=\frac{1}{2}c.r_a+\frac{1}{2}b.r_a-\frac{1}{2}ar_a=(p-a)r_a \qquad (3)'$$

و به‌این ترتیب داریم:

$$S=(p-b)r_b=(p-c)r_c=(p-a)r_a=p.r$$

قبلاً رابطهٔ زیرا را پیدا کردیم (فصل ۶ رابطهٔ ۵):

$$tg^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} \qquad (4)$$

با مقایسهٔ این رابطه، با رابطهٔ $tg^2\frac{A}{2}=\frac{r^2}{(p-a)^2}$، داریم:

$$r^2=\frac{1}{p}(p-a)(p-b)(p-c) \qquad (5)$$

و با توجه به‌اینکه $S=p.r$ بود، بدست می‌آید:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (6)$$

از ضرب چهار رابطهٔ S، از رابطه‌های (۳) و ′(۳) بدست‌می‌آید:

$$S^4=p(p-a)(p-b)(p-c)r_ar_br_cr$$

و از آنجا:

$$S=\sqrt{r.r_a.r_b.r_c} \qquad (7)$$

همچنین، به‌رابطهٔ زیر هم توجه کنیم:

$$tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}=\frac{r^۲}{(p-b)(p-c)}=\frac{p-a}{p}=\frac{r}{r_a} \qquad (۸)$$

(و دو رابطهٔ نظیر آن).

۳. محاسبهٔ ارتفاعها.

قبلاً دیدیم (فصل ۶ شمارهٔ ۱):

$$۲S=b.c.sinA=c.a.sinB=a.b.sinC \qquad (۹)$$

بنابراین، اگر ارتفاع وارد از رأس A را h_a بنامیم:

$$h_a=\frac{۲S}{a}=\frac{b.c}{a}sinA=a\frac{sinBsinC}{sinA} \qquad (۱۰)$$

همچنین، می‌توان ملاحظه کرد که:

$$h_a=\frac{a}{cotgB+cotgC}=a\frac{sinBsinC}{sinA}$$

۴. رابطه‌های بین r و R

با توجه به‌رابطهٔ (۱۰)، ارتفاع مثلث IBC چنین می‌شود:

$$\frac{a\,sin\frac{B}{۲}sin\frac{C}{۲}}{sin\frac{B+C}{۲}}=\frac{a\,sin\frac{B}{۲}sin\frac{C}{۲}}{cos\frac{A}{۲}}$$

اینهم مقداری برای r است که دو رابطهٔ شبیه آن هم وجوددارد، به‌این ترتیب نسبت $\frac{r}{R}$ خواهد شد:

$$\frac{r}{R}=۴\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \qquad (۱۱)$$

یادآوری می‌کنیم که رابطهٔ «اولر»، که در کتابهای هندسه ثابت‌شده است، رابطهٔ بین r و R و فاصلهٔ مـرکزهای I دایرهٔ محاطی و O دایرهٔ محیطی را می‌دهد:

$$d^{۲}=R^{۲}-۲Rr=R(R-۲r) \qquad (۱۲)$$

این‌رابطه نشان‌می‌دهد که‌همیشه R از ۲r بزرگتر است. همچنین، اگر d_a فاصلهٔ OI_A باشد، داریم:

$$d_a^{۲}=R^{۲}+۲Rr_a=R(R+۲r_a) \qquad (۱۲)'$$

۵. میانه‌ها

با توجه به‌قضیهٔ میانه، که در هندسه ثابت شده است، داریم:

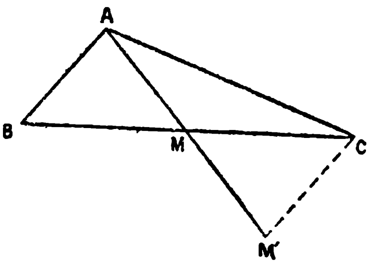
$$۲m_a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-\frac{a^{۲}}{۲}$$

که در آن، m_a طول میانهٔ وارد بـرضلع a است. این رابطه را می‌توان به‌صورت یك‌رابطهٔ مثلثاتی‌ولگاریتمی درآورد. برای این‌منظور بهتر است‌که میانهٔ وارد بر a را به‌اندازهٔ خودش تا M' امتداد دهیم و

در مثلث $AM'C$ طول AM را با کمك رابطه‌های گروه (II) محاسبه کنیم:

$$AM'^{2} = 4m_a^{2} = b^{2} + c^{2} + 2bc\cos A \qquad (13)$$

زیرا، زاویه ACM'، مکمل زاویهٔ BAC می‌باشد (شکل ۳۱).



شکل ۳۱

۶: محاسبهٔ نیمسازها

نیمساز داخلی زاویهٔ A، یعنی AD، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند و می‌توان نوشت:

$$S = ABC^{\text{مساحت}} = ABD^{\text{مساحت}} + ACD^{\text{مساحت}}$$

و از آنجا داریم:

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bd_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}cd_a\sin\frac{A}{2}$$

که در آن، d_a نمایندهٔ طول‌قطعه‌ای ازنیمساز است‌که به‌رأس A و ضلع

BC محدود می‌باشد (شکل ۳۲) از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

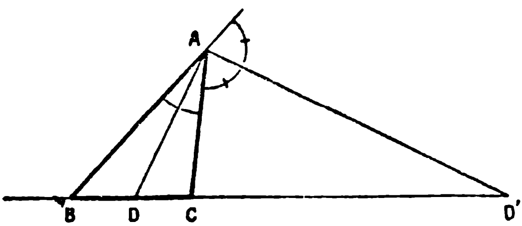
$$d_a = \frac{۲bc}{b+c} \cos \frac{A}{۲} \qquad (۱۴)$$

ودو رابطهٔ شبیه آن‌هم برای d_bوd_c بدست می‌آید. برای نیمساز خارجی AD′، می‌توان نوشت:

$$S = |ACD'^{\text{مساحت}} - ABD'^{\text{مساحت}}|$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$d'_a = \frac{۲bc}{|b-c|} \sin \frac{A}{۲} \qquad (۱۴)'$$



شکل ۳۲

همین رابطه‌ها را، با توجه به‌اینکه دستگاه (DD′BC وA) یك دستگاه توافقی است، نیز می‌توان بدست آورد؛ در این مورد باید قبلاً BDو DC، BD′وD′C را محاسبه کرد (که به‌خودی خود هم مقادیر مفیدی هستند. ولی‌دراینجا به‌عنوان‌واسطه‌مورد استفاده قرار می‌گیرند).

مورد استعمال: با کمك رابطه‌های قبل می‌توان به‌خاصیت‌جالبی در مثلث پی‌برد که بدست آوردن آن در هندسه به‌سادگی ممکن نیست

وبه‌همین مناسبت هم‌اغلب ناشناخته‌باقی‌مانده است. این خاصیت‌اینست که اگر در یك مثلث دو نیمساز داخلی برابر باشند (مثل موقعی که دو ارتفاع یا دومیانه برابرند) مثلث متساوی‌الساقین است، در حالیکه‌اگر دونیمساز خارجی برابر باشند. ممکن‌است مثلث متساوی‌الساقین‌نباشد. این خاصیت، که بـا کمك محاسبه بدون هیچ اشکالی بدست می‌آید، به نیمسازهای خارجی نقش جالب واستثنائی می‌دهد.

قبلاً تحقیق کنیم که اگر دو نیمساز داخلی برابر باشند، مثلث متساوی‌الساقین است. فرض‌کنیم $BE=CF$ باشد (شکل ۳۳) بنابراین خواهیم داشت.

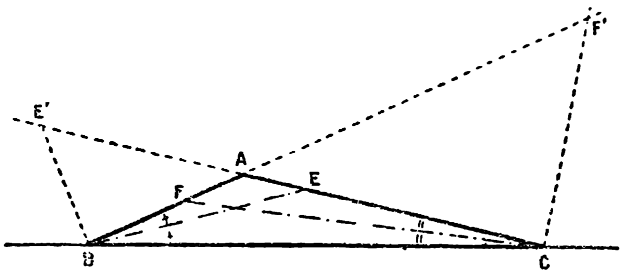
$$\frac{ac}{a+c}\cos\frac{B}{۲}=\frac{ab}{a+b}\cos\frac{C}{۲} \qquad (۱۵)$$

اگر در این رابطه به جای a وb وc مقادیر $\sin A$ و$\sin B$ و$\sin C$ که با آنها متناسب‌اند قرار دهیم و از رابطهٔ $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ استفاده کنیم، باتوجه به‌اینکه $A+B+C=\pi$ و(A و B و $C\neq ۰$ وπ)می‌باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin B\cos\frac{A-C}{۲}=\sin C\cos\frac{A-B}{۲} \qquad (۱۵)'$$

باید ثابت‌کرد که این رابطه با رابطهٔ $B=C$ معادل است. برای این منظور رابطه را برحسب زاویه‌های $\frac{A}{۲}$ ، $\frac{B}{۲}$ و $\frac{C}{۲}$ بیان می‌کنیم:

$$\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{A+C}{۲}\cos\frac{A-C}{۲}=\cos\frac{C}{۲}\cos\frac{A+B}{۲}\cos\frac{A-B}{۲}$$



شکل ۳۳

یا

$$\cos\frac{B}{2}(\cos A+\cos C)=\cos\frac{C}{2}(\cos A+\cos B)$$

و یا

$$\cos A(\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2})=(\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2})(1+2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2})$$

به‌این ترتیب، معادله، به دومعادلهٔ جداگانه تقسیم می‌شود:

$$1)\qquad \cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}=0$$

از آنجاکه $B=C$ بدست می‌آید یعنی مثلث متساوی‌الساقین است.

$$2)\qquad \cos A=1+2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

یا

$$1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}=-2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (16)$$

که نمی‌تواند دارای جواب باشد، زیرا $\cos\frac{B}{2}\times\cos\frac{C}{2}$ مثبت است.

و به‌این ترتیب معادلهٔ $'(15)$ کاملا هم‌ارز با معادلهٔ $B=C$ می‌باشد.

حالا همین مساله را در مورد نیمسازهای خارجی حل می‌کنیم.
تساوی $BE'=CF'$ منجر به‌معادلهٔ زیر می‌شود:

$$\sin B \sin\frac{A-C}{۲}=\sin C \sin\frac{A-B}{۲} \qquad (۱۷)$$

با عملهائی مشابه آنچه که روی معادلهٔ (۱۵) انجام دادیم، به ترتیب معادله‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{A+C}{۲}\sin\frac{A-C}{۲}=\sin\frac{C}{۲}\sin\frac{A+B}{۲}\sin\frac{A-B}{۲};$$

$$\sin\frac{B}{۲}(\cos A-\cos C)=\sin\frac{C}{۲}(\cos A-\cos B);$$

$$\sin^{۲}\frac{A}{۲}\left(\sin\frac{B}{۲}-\sin\frac{C}{۲}\right)=\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}\left(\sin\frac{B}{۲}-\sin\frac{C}{۲}\right)$$

معادلهٔ اخیر به‌دو معادلهٔ جداگانه تجزیه می‌شود.

۱) $\sin\frac{B}{۲}=\sin\frac{C}{۲}$ (مثلث متساوی‌الساقین)

۲) $\sin^{۲}\frac{A}{۲}=\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$

که برخلاف معادلهٔ (۱۶) دارای جواب است. یعنی زاویهٔ A مقداری درحد واسط بین مقادیر B و C خواهد بود ($\sin\frac{A}{۲}$ واسطهٔ هندسی بین $\sin\frac{B}{۲}$ و $\sin\frac{C}{۲}$ است) چنین مثلثی را متساوی‌الساقین کاذب گویند

در شکل ۳۴ داریم:

$$r=AI\sin\frac{A}{۲}=BI\sin\frac{B}{۲}=CI\sin\frac{C}{۲}$$

و بنابراین رابطهٔ (۱۸) چنین نوشته می‌شود:

$$AI^{۲}=BI.CI \qquad (۱۹)$$

از این رابطه می‌توان رابطهٔ دیگری بدست آورد که به‌کمك آن ساختن چنین مثلثی ممکن باشد. اگر ازنقطه‌های I و I_A عمودهایی بر AB رسم کنیم (IL و I_AL_A) واز I عمود I_M را بر I_AL_A فرودآوریم؛ از یکطرف مثلثهای AIL وII_AM و از طرف دیگر مثلثهای BILو I_AIC متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AI}{r}=\frac{II_A}{r_a-r};\ \frac{BI}{r}=\frac{II_A}{CI}$$

و از آنجا: $$AI(r_a-r)=r.II_A=BI.CI$$

و به‌این ترتیب، رابطهٔ اساسی(۹) به‌رابطهٔ زیر منجر می‌شود:

$$AI=r_a-r=MI_A$$

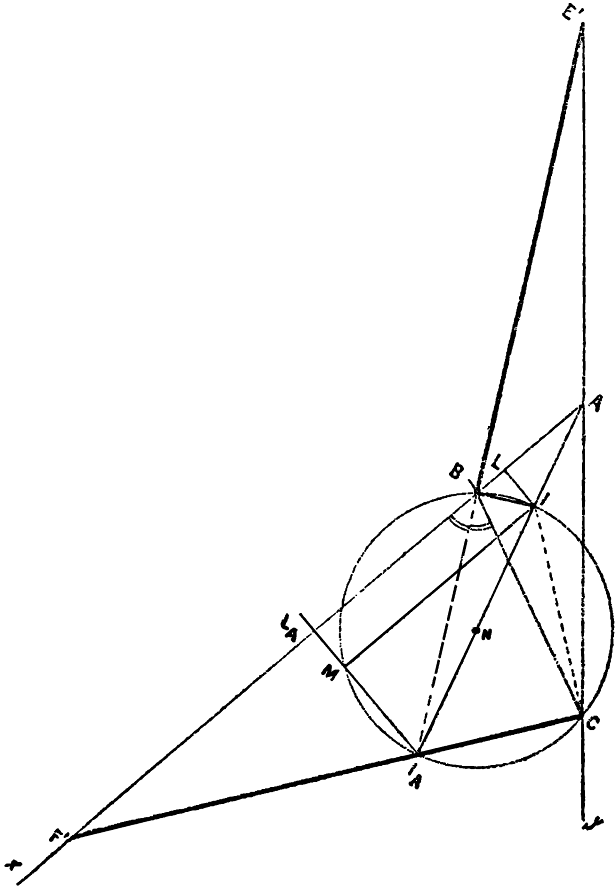
و $$II_A=\frac{(r_a-r)^{۲}}{۲}=\frac{mI_A{}^{۲}}{r}$$

و از آنجا: $$MI_A=AI+II_A=\frac{r_a}{r}\left(r_a-r\right)=\frac{r_a}{r}MI_A$$

از این رابطه، می‌توان مثلث متساوی‌الساقین کاذبی با زاویه‌های BوC ساخت، که در آن ضلع $BC=a$ و زاویهٔ روبروی آن A معلوم باشد.

قبلا یادآوری می‌کنیم که پاره خط II_A قطر دایره‌ای است که از BوC می‌گذرد، که درآن $\widehat{BIC}=\frac{A}{۲}+\frac{\pi}{۲}$ و ازآنجا $II_A=\frac{a}{\cos\frac{A}{۲}}$وبنابر-

این معلوم خواهد بود. بنابراین، این دایره (Γ) را رسم می‌کنیم و مثلث IMI_A که در زاویهٔ M قائمه است می‌سازیم و به‌این ترتیب، ضلع II_A و زاویهٔ $\widehat{MII_A}=\frac{A}{۲}$ معلوم خواهد بود. اکنون I_AI را به‌اندازهٔ $IA=I_AM$ امتداد می‌دهیم و به‌این ترتیب، رأس A از مثلث موردنظر بدست می‌آید. برای بدست آوردن نقطه‌های B و C، از نقطهٔ A دو خط



شکل ۳۴

Ax و Ay را چنان رسم می‌کنیم که با AI زاویهٔ $\frac{A}{2}$ بسازند، هر یك از این دوخط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند که باید از بین آنها دونقطهٔ غیر متقارن نسبت به AI را انتخاب کرد.

بحث: خط Ax (یا Ay) موقعی دایره راقطع می‌کند که δ، یعنی فاصلهٔ N مرکز دایرهٔ (Γ)، از این خط کوچکتر از ρ شعاع دایره باشد.

داریم: $AI = MI_A = 2\rho \sin\frac{A}{2}$. از طرف دیگر داریم:

$$\delta = AN\sin\frac{A}{2} = \left(2\rho\sin\frac{A}{2} + \rho\right)\sin\frac{A}{2}$$

و به‌این ترتیب، شرط $\delta < \rho$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$2\sin^2\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} - 1 < 0$$

یعنی $\sin\frac{A}{2} < \frac{1}{2}$ یا $A < \frac{\pi}{3}$.

بنابراین، حداکثرزاویهٔ A برابر $\frac{\pi}{3}$ است، اگر $A = \frac{\pi}{3}$ باشد، مثلث متساوی‌الساقین می‌شود واگر A کوچکتر از $\frac{\pi}{3}$ باشد، B وC با هم برابر نمی‌شوند (یکی بزرگتر و دیگری کوچکتر از A خواهد بود). در حالت‌خاص، زاویهٔ B (یا C) می‌تواند قائمه باشد، دراینصورت‌خواهیم داشت:

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)$$

که به‌صورت معادلهٔ زیر در می‌آید:

$$\cos^4 A - 4\cos^3 A + 5\cos^2 A - 1 = 0$$

که برای A جواب تقریبی ″۱۹/۶ ′۵۷ °۵۴ بدست می‌آید.

۷. کاربرد نتیجه‌هایی که گرفته‌ایم

رابطه‌هایی که دراین فصل ازآنها نام بردیم، به‌طور کلی‌وسیله‌ای برای حل مثلثی هستندکه سه جزء مستقل‌آن مفروض باشد. در این مورد طرح یك راه حل عمومی بـرای بدست آوردن جوابها کار مشکلی است، زیرا در هرمورد تنها راه حل خاصی می‌توان جستجو کرد. تنهاکاری‌که می‌توان‌کرد، اینست‌که نمونه‌هایی از این موارد را ذکرکنیم و به‌بعضی توصیه‌های لازم توجه‌کنیم.

ساده‌ترین‌گروهی‌که می‌توان در نظرگرفت، موردی است کـه دو زاویهٔ مثلث معلوم باشد، زیرا در اینصورت بلافاصله زاویهٔ سوم بدست می‌آید ومساله، منجر به‌رابطه‌های‌گروه (I) می‌شود.

گروه دوم، شامل مساله‌هایی می‌شودکه‌درآنها یکی از زاویه‌های مثلث معلوم است، در اینصورت مجموع دو زاویهٔ دیگر در دست است وبهتر است‌که راهی برای محاسبهٔ تفاضل همین دوزاویه جستجو کنیم.

بالاخره به گروهی از مساله‌ها می‌رسیم کـه در آنها هیچکدام از زاویه‌های مثلث، معلوم نیست. در اینصورت باید زاویه‌ها را به عنوان مجهولهای اصلی، انتخاب‌کرد ودر حالتی‌که ممکن است ترسیم‌هندسی شکل را هم به‌عنوان راهنما بدست آورد. در این مورد، بهتر است‌که‌در تمام حالتها رابطه‌های حاصل را به‌صورت لگاریتمی در آوریم.

مثال I (دو زاویه). فرضها: B و C و مساحت S.

حل: $A=\pi-B-C$ وداریم $2S=bc\sin A$ ، باکمك رابطهٔ سینوسها می‌توان نوشت:

$$a^2=bc\frac{\sin^2 A}{\sin B\sin C}=\frac{2S\sin A}{\sin B\sin C}$$

وبه‌همین ترتیب، با تبدیل دوری این رابطه، b^2 و c^2 بدست می‌آید. ضمناً، این رابطه‌ها، لگاریتمی هم هستند. مساله همیشه دارای جواب است، زیرا با در دست‌داشتن زاویه‌ها، می‌توان‌مثلث را به‌طریق هندسی باتقریب تشابه ساخت ودر نتیجه تنها یك مثلث بدست‌آورد که سطح آن برابربا S باشد.

مثال II (یك زاویه). فرضها: A، R، r.

داریم $B+C=\pi-A$، کوشش می‌کنیم که تفاضل $B-C$ را بدست آوریم؛ رابطهٔ سینوسها را می‌نویسیم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\cos C}=\frac{2p}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$$

معادلهٔ آخر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$R[\sin A+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}]=p \qquad (20)$$

از طرف دیگر داریم:

$$tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a} \quad \text{و} \quad p=a+r\,cotg\frac{A}{2}$$

همچنین $\sin\frac{B+C}{۲}=\cos\frac{A}{۲}$

و بنابراین، رابطهٔ (۲۰) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\cos\frac{B-C}{۲}=\frac{r+۲R\sin^{۲}\frac{A}{۲}}{۲R\sin\frac{A}{۲}} \qquad (۲۱)$$

می‌توان بدون اینکه به کلیت مساله لطمه‌ای وارد شود $B > C$ فرض کرد، از طرف دیگر، زاویهٔ حاده‌ای مثل α وجود خواهد داشت به نحوی که مقدار مثبت طرف دوم رابطهٔ (۲۱) مساوی با $\cos\alpha$ باشد، به این ترتیب مساله منجر به‌حل دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} B+C=\pi-A \\ B-C=۲\alpha \end{cases}$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} B=\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}+\alpha \\ C=\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}-\alpha \end{cases}$$

که در آن، α زاویه‌ای است حاده.

جوابها به‌شرطی قابل‌قبول هستند که $\alpha < \frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}$، یعنی $\cos\alpha > \sin\frac{A}{۲}$ باشد؛ a و b و c هم به‌سادگی و از رابطهٔ سینوسها بدست می‌آیند.

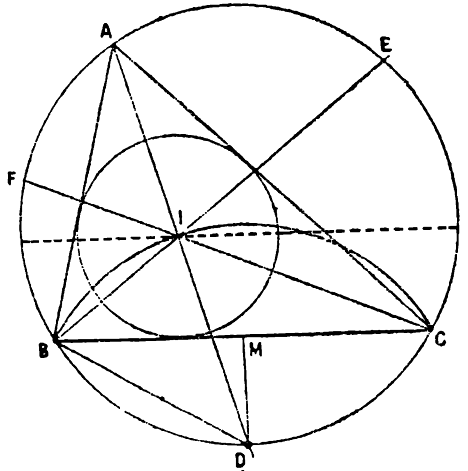
بحث: شرط $\cos\alpha > \sin\frac{A}{۲}$ با توجه به‌مثبت بودن $\sin\frac{A}{۲}$ به‌صورت

زیر در می‌آید:

$$۲R\sin^۲\frac{A}{۲}+r>۲R\sin^۲\frac{A}{۲}$$

و این رابطه هم همیشه درست است، ولی برای اینکه $\cos\frac{B-C}{۲}$ که بی‌شك مقدار مثبتی است وجود داشته باشد، باید از ۱ کوچکتر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$R>\frac{r}{۲\sin\frac{A}{۲}(۱-\sin\frac{A}{۲})} \qquad (۲۳)$$



شکل ۳۵

ترسیم هندسی ـ ابتدا دایرهٔ محیطی مثلث را که شعاع آن معلوم است رسم می‌کنیم، زاویه‌ای برابر A در دایره محاط کنیم، وتر روبه‌روی‌آن در دایره برابر BC=a خواهد شد، وتر BC را به دلخواه رسم

می‌کنیم وکوشش می‌کنیم تا رأس A را بدست بیاوریم. نقطهٔ D وسط قوس BC یکی از نقطه‌های نیمساز داخلی زاویهٔ A است. اگر مرکز دایرهٔ محاطی مثلث را I فرض‌کنیم، مثلث BDI متساوی‌الساقین خواهد بود، زیرا زاویهٔ $\hat{IBD}$ که زاویهٔ محاطی از دایرهٔ محیطی مثلث است، رو به‌رو به‌کمان $\widehat{ED}=\widehat{EC}+\widehat{CD}$ می‌باشند و زاویه $\hat{BID}$ که یك زاویهٔ داخلی‌است، روبه‌رو به‌کمانهای $\widehat{AE}$ و $\widehat{DB}$ می‌باشد، که به‌ترتیب باکمانهای $\widehat{EC}$ و $\widehat{CD}$ برابرند. به‌این ترتیب خواهیم داشت:

$$DI=DB=DC$$

بنابراین، نقطهٔ I ، که در داخل دایـرهٔ محیطی مثلث است، روی محیط دایره‌ای خواهد بود، که مـرکز آن D وشعاع آن DB است. از طرف دیگر، چون شعاع دایـرهٔ محاطی مثلث، یعنی r، معلوم است و r همان فاصلهٔ نقطهٔ I از BC است، I روی خطی خواهد بود، که به فاصلهٔ r به موازات BC رسم شود (در طرف مقابل نقطهٔ D نسبت به BC). و به این ترتیب، دو جواب برای نقطهٔ I بدست می‌آید، کـه نسبت به عمود منصف BC متقارنند. درحالتیکه خط موازی مذکورکمان BC را قطع نکند، مساله دارای‌جواب نیست. حداکثر مقدار r می‌تواند BD − DM باشد (M را وسط BC گرفته‌ایم).

و چون

$$MD=\frac{a}{۲}tg\frac{A}{۲} \quad و \quad BD=۲R\sin\frac{A}{۲}$$

باید داشته باشیم:

$$r < ۲R\sin\frac{A}{۲} - ۲R\sin^{۲}\frac{A}{۲}$$

و این، همان شرط(۳) است، که قبلا هم بدست آوردیم.

تبصره ـ شبیه همین مساله را می‌توان برای حالتی هم که به‌جای r، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی زاویهٔ A داده شده باشد، حل کرد.

مثال III (هیچکدام از زاویه‌ها معلوم نیست).

قبلا بایداین پرسش رادر برابر خودگذاشت که آیا نمی‌توان مساله را به مسالهٔ دیگری تبدیل کرد، که درآن زاویه‌ها معلوم باشند؟ مثلا، اگر R و b و c مفروض باشند، بلافاصله از رابطه‌های $\sin B = \frac{b}{۲R}$ و $\sin C = \frac{c}{۲R}$، زاویه‌های B وC بدست می‌آید وحل وبحث مساله به‌سادگی انجام می‌گیرد.

در حالتی هم که نتوان بلافاصله زاویه‌ها را بدست آورد، به‌هر حال جستجوی زاویه‌ها طرح اساسی مساله خواهد بود. در این‌مورد روش عمومی وجود ندارد وبرای هرحالتی باید راه حل‌خاصی پیداکرد. ما در اینجا به‌حل یك نمونهٔ نسبتاً دشوار می‌پردازیم. فرضها: میانه، ارتفاع و نیمساز داخلی مرسوم از یك رأس مثلث.

فرض می‌کنیم A رأسی‌باشدکه میانه، ارتفاع‌ونیمساز مرسوم از آن مفروض‌باشد. می‌دانیم که زاویهٔ‌بین ارتفاع AH ونیمساز AD برابر $\frac{B-C}{۲}$ است (با فرض $B > C$) بنابراین، داریم:

$$\cos\frac{B-C}{۲} = \frac{h}{d} \qquad (۱)$$

طبق قضیهٔ میانه(فصل ششم، شمارهٔ ۲، a) داریم:

$$b^2-c^2=2aHM=2a\sqrt{m^2-h^2} \qquad (2)$$

از طرف دیگر داریم:

$$h=b\sin C=c\sin B \quad \text{و} \quad ah=bc\sin A \qquad (3)$$

در اینصورت رابطهٔ (۲) چنین می‌شود:

$$h\left(\frac{1}{\sin^2 C}-\frac{1}{\sin^2 B}\right)=\frac{2\sin A}{\sin B\sin C}\sqrt{m^2-h^2}$$

و یا

$$4h\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=$$
$$=2\sin A\sin B\sin C\sqrt{m^2-h^2}$$

و ازآنجا، با توجه به‌رابطهٔ $\sin A=\sin(B+C)$، خواهیم داشت:

$$\cos(B+C)=\cos(B-C)-\frac{h}{\sqrt{m^2-h^2}}\sin(B-C) \qquad (4)$$

که با استفاده از رابطهٔ(۱) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\cos(B+C)=\frac{2h^2}{d^2}-1-\frac{2h^2}{d^2}\sqrt{\frac{d^2-h^2}{m^2-h^2}} \qquad (5)$$

با کمک‌رابطه‌های(۱) و (۵)، زاویه‌ها، وسپس به‌کمک رابطه‌های (۳)، ضلعهای مثلث بدست می‌آید.

اگر λ را زاویهٔ مثبت وحاده‌ای فرض‌کنیم، به‌نحوی‌که $\cos\lambda=\frac{h}{d}$ باشد، $B-C=2\lambda$ می‌شود. رابطهٔ (۵) راهم می‌توان به‌صورت زیر

$$1+\cos(B+C)=\frac{2h^2}{d^2}\left[1-\sqrt{\frac{d^2-h^2}{m^2-h^2}}\right]=2\cos^2\frac{B+C}{2}$$

و اگر فرض کنیم:

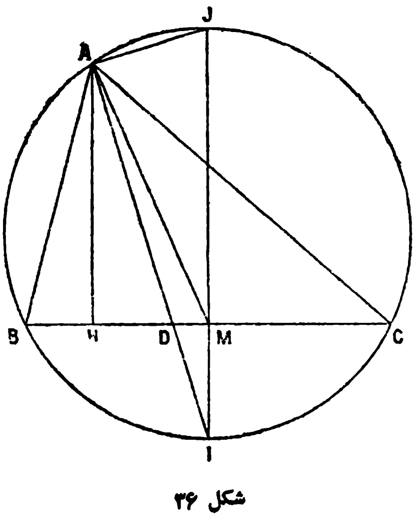
$$\sqrt{\frac{d^2-h^2}{m^2-h^2}}=\sin^2\varphi \qquad \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

خواهیم داشت:

$$\cos\frac{B+C}{2}=\cos\lambda\cos\varphi$$

و ازآنجا $B+C$ بدست خواهد آمد.

بحث: از رابطهٔ(۱) نتیجه می‌گیریم که باید $h<d$ باشد و این روشن است، زیرا، h عمودی است که ازرأس A رسم شده، در حالیکه d مایلی است که ازهمان رأس برقاعده فرودآمده است. رابطهٔ(۵) هم نتیجه می‌دهد:



شکل ۳۶

$$d^2 - h^2 < m^2 - h^2 \quad \text{یا} \quad d < m$$

و این شرط هم به‌کمك هندسه، بلافاصله بدست خواهدآمد.

رسم هندسی: ابتدا خط Δ را (خطی که از BC عبور می‌کند) رسم می‌کنیم ونقطهٔ A را به فاصلهٔ h از آن انتخاب می‌کنیم. از A می‌توان نیمساز AD ومیانهٔ AM را رسم کرد. عمودی‌که از M بر Δ اخراج‌شود، نیمساز AD را در I قطع می‌کندکه نقطه‌ای ازدایرهٔ محیطی مثلث‌است. عمودی‌که ازA برAD اخراج شود MI را در J قطع‌می‌کند که نقطهٔ متقاطر I روی دایره محیطی مثلث است و بنابراین، دایرهٔ به قطر IJ خط Δ را درنقطه‌های BوC قطع خواهد کرد. نامساوی دوطرفه $h < d < m$ هم، شرط‌لازم‌وکافی‌برای‌وجود جواب خواهد بود (شکل۳۶)

۸

کاربردهای مثلثات

یك‌شکل هندسی وقتی مشخص است که با دردست داشتن بعضی از اجزاء آن بتوان سایر اجزاء شکل (زاویه‌ها، طولها ومساحتها) را به طریقی ساخت (ویا محاسبه‌کرد)، دراین فصل کوشش می‌کنیم که این اجزاء رادربعضی‌حالتهایی، که مربوط به‌مثلثات‌مسطحه هستند، به‌کمك محاسبه مشخص کنیم. بسیاری از این مساله‌ها را تاکنون گروه‌بندی کرده‌ایم (حل مثلث) و بنابراین، هرجا که لازم باشد به‌آنها مراجعه خواهیم‌کرد. راه‌کلی برای حل‌چنین مساله‌هایی اینست‌که آنها را منجر به حل مثلثهای مجاور هم‌کنیم وما ضمن چند مثال آنرا روشن خواهیم کرد.

ترجیح می‌دهیم که مثالها را ازعلوم دقیقه‌ای، که با مثلثات مقدماتی سروکار دارند، انتخاب کنیم، باوجودیکه برای تحلیل علوم دقیقه، سایرروشهای ریاضی‌هم‌نقش اساسی دارند، نباید ازنظر دورداشت که مثلثات، پایهٔ هندسی نقشه‌برداری ونجوم را تشکیل می‌دهد.

مسالهٔ اساسی اینست که تعدادی نقطه‌ها را علامتگذاری کنیم که وضع‌آنها نسبت به یکدیگر مشخص باشند، این علامتها در مورد مساحی نقطه‌هایی‌ازسطح‌زمین، ودرموردنجوم، اجرام‌سماوی‌خواهدبود. مثلااندازه‌گیری فاصله‌های مستقیم درمورد مساحی خیلی مشکل ودر نجوم اساساً غیرممکن به‌نظر می‌رسد. درحالیکه محاسبهٔ زاویه‌ها را می‌توان با دقت

فوق‌العاده انجام‌داد و بنابراین به‌این مطلب می‌رسیم که اندازه‌گیری فاصله‌ها را به اندازه‌گیری زاویه‌ها منجر کنیم و به طور کلی می‌توانیم مساله را به‌جایی منجر کنیم که اندازهٔ یك‌فاصله را با کمك محاسبه‌انجام دهیم.

۱. کاربرد مثلثات در هندسه

در هندسهٔ مقدماتی، مثلادرمورد مثلث، به‌مساله‌هایی برخورد می‌کنیم که حل آنها به‌طریق هندسی بسیار دشوار است. درحالیکه به‌کمك محاسبه‌های مثلثاتی می‌توان تقریباً بلافاصله آنها راحل کرد. بهترین نمونه ازاین‌قبیل مساله‌ها، مسالهٔ مربوط به‌ثلث‌سازها است. مساله اینست: درداخل‌مثلث ABC وازرأس A دونیم خط Ax و Ay را چنان رسم کنید که سه‌زاویهٔ BAx و xAy و yAC برابرباشد (Ax و Ay را «ثلث‌ساز زاویهٔ A» گویند)، همچنین برای زاویه‌های B و C. ثلث‌ساز Ax زاویهٔ A، که به‌ضلع AB نزدیکتر است، ثلث‌سازی از زاویهٔ B راکه به‌همین ضلع نزدیکتراست، درنقطهٔ R قطع می‌کند، به همین ترتیب، نقطه‌های P و Q را با توجه به ضلعهای AC و BC معین کنید. ثابت کنید که مثلث PQR متساوی‌الاضلاع است.

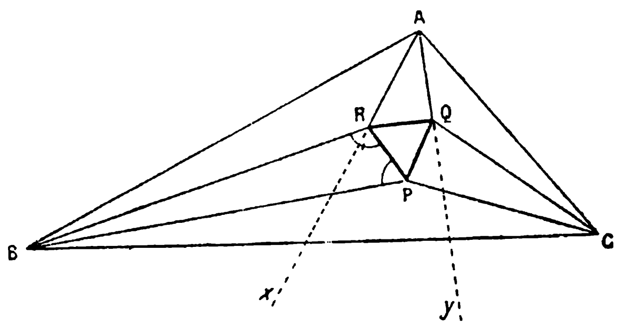
به کمك یکی از گروه رابطه‌های فصل ۶ می‌توان این نتیجه را بدست آورد. روش مثلثاتی‌تر اینست که از زاویه‌ها استفاده کنیم، یعنی رابطهٔ سینوسها را به کار ببریم. کوشش می‌کنیم یکی از ضلعهای مثلث PQR رامحاسبه کنیم ونشان دهیم که جواب به‌ضلع انتخاب شده بستگی ندارد و تابعی

متقارن نسبت به زاویه‌های A و B و C می‌باشد. مثلا PR را محاسبه می‌کنیم.
درمثلثهای BPC و BRA به‌کمك رابطه‌های گروه I داریم:

$$\frac{BP}{\sin\frac{C}{۳}}=\frac{a}{\sin\frac{B+C}{۳}} \text{ و } \frac{BR}{\sin\frac{A}{۳}}=\frac{c}{\sin\frac{A+B}{۳}} \qquad (۱)$$

اگر درمثلث BPR فرض کنیم: $\widehat{BPR}=\hat{P}$ و $\widehat{BRP}=\hat{R}$ ، داریم:

$$\frac{PR}{\sin\frac{B}{۳}}=\frac{BP}{\sin R}=\frac{BR}{\sin P} \qquad (۲)$$



شکل ۲۷

که با توجه به‌رابطهٔ(۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{PR}{\sin\frac{B}{۳}}=\frac{c\sin\frac{A}{۳}}{\sin P\sin\frac{A+B}{۳}}=\frac{a\sin\frac{C}{۳}}{\sin R\sin\frac{B+C}{۳}} \qquad (۳)$$

تساوی اخیر را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$\frac{\sin R}{\sin A \sin\frac{C}{3}\sin\frac{A+B}{3}}=\frac{\sin P}{\sin C\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B+C}{3}} \qquad (4)$$

این رابطه کاملا منطقی است و در حقیقت همان رابطهٔ تقسیم زاویه به ۳ می‌باشد که در فصل سوم شمارهٔ ۵ (صفحهٔ ۶۳) بیان کردیم:

$$\sin x = 4\sin\frac{x}{3}\sin\frac{x+\pi}{3}\sin\frac{x+2\pi}{3} \qquad (5)$$

بعلاوه روشن است که $\sin\frac{x+2\pi}{3}=\sin\frac{x+\pi}{3}$ و $P+R=\pi-\frac{B}{3}$،

از رابطهٔ(۵) نتیجه می‌شود: $P=\frac{C+\pi}{3}$ و $R=\frac{A+\pi}{3}$. از رابطهٔ (۳) داریم:

$$PR=a\frac{\sin\frac{C}{3}}{\sin\frac{B+C}{3}}\times\frac{\sin\frac{B}{3}}{\sin\frac{A+\pi}{3}}$$

واگر به‌جای a مقدار $2R\sin A$ را قرار دهیم بانوجه به‌رابطهٔ(۵)خواهیم داشت:

$$PR=8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}$$

که درآن R شعاع دایره محیطی مثلث است وهمانطورکه می‌بینیم اندازهٔ PR نسبت به‌زاویه‌های A وB وC متقارن است وبنابراین داریم:

$$PR=PQ=QR$$

می‌توان بعدازاثبات رابطهٔ(۳)، از رابطهٔ

$$\overline{PR}^2=\overline{BP}^2+\overline{BR}^2-2BP.BR\cos\frac{B}{3}$$

استفاده کرد، ولی روشی راکه به‌کاربردیم، بیشتر شامل زاویه‌هایRوQ می‌باشد و بنابراین، ساده‌تر است وضمناً می‌تواند راهنمائی برای اثبات هندسی مساله هم‌باشد.

۲. کاربرد مثلثات در نقشه‌برداری

روش‌مثلثاتی اندازه‌گیری ومحاسبهٔ زاویه‌های یك‌شکل وازآنجا، تعیین طول حقیقی به‌وسیلهٔ اندازهٔ یك‌فاصله، درست همان چیزی‌است‌که در مساحی برای تنظیم نقشه‌ها به‌کار می‌رود. مسالهٔ نقشه درواقع‌خیلی پیچیده است: باید روی صفحه قسمتی ازسطح زمین را نشان داد؛ ولی سطح زمین مسطح نیست و بنابراین، نمی‌توان شکلهای متشابه به‌وجود آورد. به‌این مناسبت، قطعه‌هایی باسطح کوچك رادرنظر می‌گیرند، ولی درچنین وضعی هم‌سطح مورد بررسی باسطح مستوی فرق دارد وآنچه‌را که رسم می‌کنند، درحقیقت تصویر زمین روی صفحهٔ افق‌است.

برای تنظیم یك‌نقشه، ابتدا به‌دقت‌جای نقطه‌های مشخصی ازسطح زمین را معین می‌کنند (مثل قله‌ها، مناره‌ها وغیره) و به‌این ترتیب مجموعهٔ نقطه‌هایی به‌وجود می‌آورند، سپس نقطه‌های درجهٔ دوم را هم به‌آنها اضافه می‌کنند.

برای مشخص‌کردن این‌نقطه‌ها، آنها را چنان به‌هم وصل‌می‌کنند که یك شبکهٔ مثلث به وجود آید، چیزی که آنرا مثلث‌بندی‌گویند. بعد زاویه‌ها وقاعدهٔ یکی از این مثلثها را که قاعدهٔ دستگاه نامیده می‌شود،

تعیین می‌کنند. روشن‌است که طول قاعده به‌صورت افقی اندازه گرفته می‌شود وبنابراین برای‌دقت کار، کوشش‌می‌شودکه قاعده را روی‌زمینی که تا حدممکن افقی است انتخاب‌کنند.

زاویه‌ها به‌صورت افقی در می‌آیند واندازهٔ آنها به‌کمك زاویه‌یاب (تئودولیت) بدست می‌آید. زاویه‌ای که باید اندازه گرفته شود، زاویهٔ مسطحه فرجه‌ای است‌که از صفحه‌های قائم ماربر دوخط‌متوالی‌به وجود آمده است.

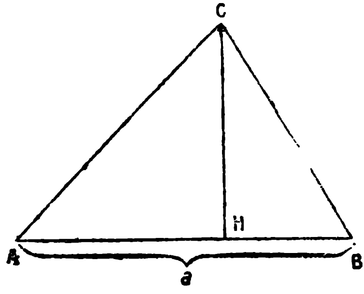
فرض‌می‌کنیم AB قاعده‌وC تصویرنقطه‌ای‌باشد، که‌باید مشخص شود. باشد. AوB را اندازه می‌گیریم وداریم (شکل ۳۸):

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$$

و از آنجا:

$$AC=AB\frac{\sin A}{\sin(A+B)} \text{ و } AC=AB\frac{\sin B}{\sin(A+B)}$$

از اینجا، ارتفاع را هم می‌توان بدست‌آورد:



شکل ۳۸

$$AH = h\,cotg A \text{ و } BH = h\,cotg B$$

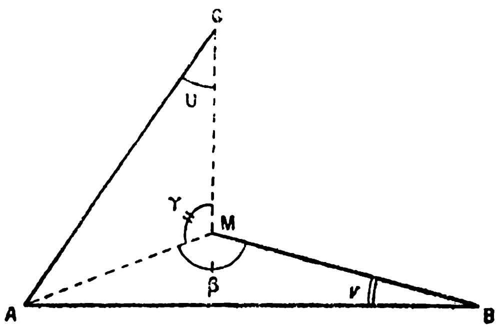
و ازآنجا باتوجه به‌اینکه $AH + BH = a$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$h = \frac{a}{cotg A + cotg B} = a\frac{sin A\, sin B}{sin(A+B)}$$

برای تعیین سایر نقطه‌ها، یکی از ضلعهای مثلث ABC راموردِ استفاده قرار می‌دهیم. این روش، به‌خصوص برای اندازه‌گیری کمانهای نصف‌النهاری به‌کارمی‌رود. نخستین کسی که در فرانسه خط نصف‌النهار را اندازه‌گرفت، مشن (Méchain) بود (۱۷۹۲-۱۷۹۸).

وقتی که شبکه به‌پایان رسید، باید نقطه‌های درجهٔ دوم را روی آن جای داد، ولی اگر روی زمین اندازه‌گیری زاویه‌ها ساده‌تر ازاندازه‌گیری طولهاست، در روی نقشه برعکس آنست.

روی زمین، درنقطهٔ M می‌ایستیم و زاویه‌هایی را که تحت‌آنها AB وAC دیده می‌شوند، اندازه می‌گیریم. این اندازه‌گیری به‌ما امکان خواهد دادکه نقطهٔ M را روی نقشه منتقل کنیم. ولی ترجیح می‌دهند که قطعه‌های MA وMB وMC را محاسبه کنند. به‌این ترتیب، انتقال‌روی



شکل ۳۹

نقشه به وسیلهٔ سه دایره به‌مرکز A و B و C انجام می‌گیرد که باید دارای یك نقطهٔ مشترك باشند.

اگر فرض کنیم $MCA=u$ و $MBA=v$ باشد (b و c و A معلوم‌اند) داریم (شکل ۳۹):

$$u+v=2\pi-(A+\beta+\gamma)$$

$$\frac{MA}{\sin v}=\frac{AB}{\sin\beta} \quad \text{و} \quad \frac{MA}{\sin u}=\frac{AC}{\sin\gamma}$$

و ازآنجا:

$$AC\frac{\sin u}{\sin\gamma}=AB\frac{\sin v}{\sin\beta}$$

ازاین دستگاه، می‌توان u و v را محاسبه کرد. اگر $AB=b$ و $AC=c$ فرض شود، می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin u}{b.\sin\gamma}=\frac{\sin v}{c.\sin\beta}=\frac{\sin u+\sin v}{b\sin\gamma+c\sin\beta}=\frac{\sin u-\sin v}{b\sin\gamma-c\sin\beta}$$

یا:

$$\frac{\sin u-\sin v}{\sin u+\sin v}=tg\frac{u-v}{2}cotg\frac{u+v}{2}=\frac{b\sin\gamma-c\sin\beta}{b\sin\gamma+c\sin\beta}$$

وچون داریم: $\frac{u+v}{2}=\pi-\frac{A+B+\gamma}{2}$ خواهیم داشت:

$$tg\frac{u-v}{2}=tg\frac{A+\beta+\gamma}{2}\times\frac{c\sin\beta-b\sin\gamma}{c\sin\beta+b\sin\gamma}(A+\beta+\gamma\neq\pi)$$

که اگر $\frac{b\sin\gamma}{c\sin\beta}=tg\varphi$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{c\sin\beta-b\sin\gamma}{c\sin\beta+b\sin\gamma}=tg(\frac{\pi}{4}-\varphi)$$

و بنابراین

$$tg\frac{u-v}{۲}=tg\frac{A+\beta+\gamma}{۲}tg(\frac{\pi}{۴}-\varphi)=\lambda$$

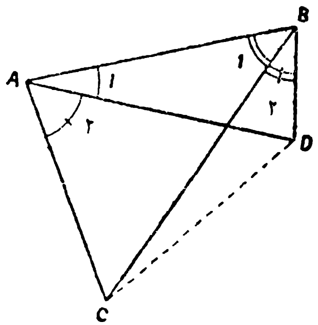
و اگر ψ زاویه‌ای به‌تانژانت λ باشد، نتیجه می‌شود:

$$u-v=۲\psi+۲k\pi$$

تبصره - حالت $A+\beta+\gamma=\pi$ را می‌توان به‌کلی کنار گذاشت (حالتی که چهارضلعی محاطی است). این حالت درعمل مورد استعمال ندارد، زیرا نقطهٔ M همیشه‌درداخل مثلث واقع است. در غیراینصورت جواب‌قابل قبول نخواهد بود، ولی می‌توان به‌کمك قطعه خطهای‌اصلی وبا ترسیم هندسی معمولی‌آنرا بدست آورد.

۳. اندازه‌گیری فاصلهٔ بین دو نقطه‌ای‌که در دسترس نیستند

CوD را دونقطهٔ غیرقابل دسترس فرض کنید. برای اندازه‌گرفتن‌فاصلهٔ این دو نقطه، پشت سرهم، در نقطه‌های AوB می‌ایستیم و این زاویه‌ها



شکل ۴۵

را اندازه می‌گیریم:

$$\hat{BAD}=A_1 \text{ و } \hat{DAC}=A_2$$

$$\hat{ABC}=B_1 \text{ و } \hat{CBD}=B_2$$

وبنابراین داریم (شکل ۴۰):

$$AC=AB\frac{\sin B_1}{\cos(A+B_1)} \quad (\hat{A}=\hat{A}_1+\hat{A}_2)$$

و
$$AD=AB\frac{\sin B_1}{\sin(A_1+B)} \quad (\hat{B}=\hat{B}_1+\hat{B}_2)$$

و از آنجا:
$$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AC}.\overline{AD}\cos A_2$$

یا
$$\overline{CD}^2=\overline{AB}^2\left[\frac{\sin^2 B_1}{\sin^2(A+B_1)}+\frac{\sin^2 B}{\sin^2(A_1+B)}-2\frac{\sin B\sin B_1\cos A_2}{\sin(A_1+B)\sin(A+B_1)}\right]$$

مساله حل‌شد، زیرا فاصلهٔ AB را می‌توان اندازه‌گرفت. حالا بایدرابطهٔ بدست آمده را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کرد، برای این منظور فرض می‌کنیم:

$$\frac{\sin B_1}{\sin(A+B_1)}=R\cos\varphi \text{ و } \frac{\sin B}{\sin(A_1+B)}=R\sin\varphi \text{ و}$$

$$\sin 2\varphi\cos A_2=\cos 2\Theta$$

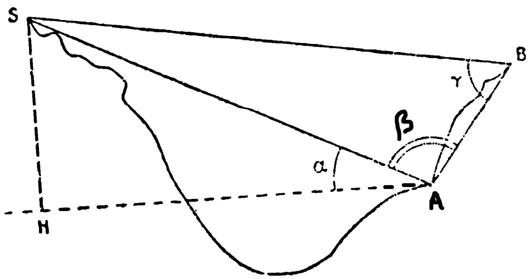
دراینصورت، خواهیم داشت:

$$CD = AB \times R\sqrt{\text{۲}}\, sin\Theta$$

اندازه‌گیری بلندی

a) قلهٔ یك کوه . ـ مطابق شکل ۴۱، در نقطه‌های A و B جاگرفته و α زاویهٔ AS با صفحهٔ افق را اندازه می‌گیریم وسپس زاویه‌های

$$\beta = \hat{SAB} \text{ و } \gamma = \hat{SBA}$$



شکل ۴۱

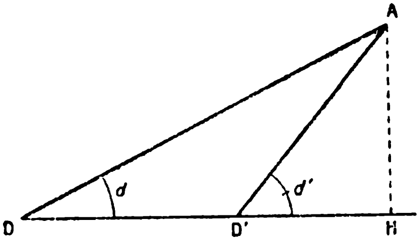
اگر فاصلهٔ AB=a باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{SA}{sin\gamma} = \frac{a}{sin(\beta+\gamma)} \text{ و } SH = SA\, sin\alpha$$

که ازآنجا ارتفاع SH بدست می‌آید.

b) علامتگذاری هواپیما . ـ به‌کمك دوربینهایی که در D و D′ قرارداده‌شده‌است‌ومی‌توانند‌دورمحورهای‌موازی‌دوران کنند،زاویه‌های‌دو سطحی d و d′ را اندازه می‌گیرند (شکل ۴۲)، بلافاصله بدست می‌آید:

$$h = AH = DD'\frac{sin d\, sin d'}{sin(d-d')}$$



شکل ۴۲

۵. کاربرد مثلثات در نجوم

دراینجا مسالهٔ اساسی عبارتست ازمحاسبهٔ مقادیر مطلق فاصله‌های سیاره‌ها.

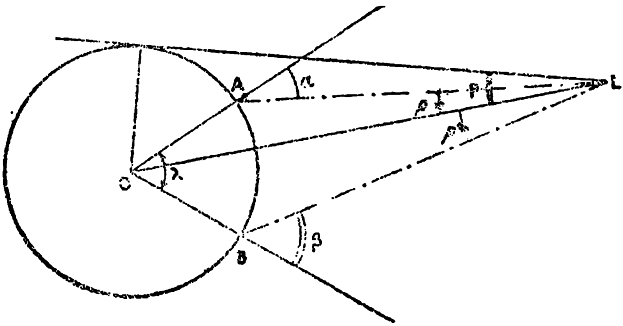
a) فاصلهٔ زمین تا ماه. ـ از آنجاکه ماه در زندگی روزانهٔ ما نقش اساسی دارد، شناسایی ماه وازآن جمله، محاسبهٔ فاصلهٔ آن تازمین اهمیت جدی کسب می‌کند.

روشی که دراین مورد به‌کار می‌رود عبارتست ازمحاسبهٔ اختلاف منظرماه، یعنی زاویهٔ $\hat{p}$ که تحت آن ازیك نقطهٔ ماه می‌توان شعاع زمین را دید.

برای این منظور، دو رصدکننده، در دونقطهٔ A وB، که روی یك نصف‌النهار واقع وارتفاعهای آنها نیزمعلوم باشد، قرار می‌گیرند. وقتی که ماه L ازصفحهٔ نصف‌النهار این دونقطه عبور می‌کند، در نقطهٔ A زاویهٔ α را اندازه می‌گیرند، این زاویه بین شعاع دیدنوری که ازمرکز ماه گذشته، وقائم محل است (این زاویهٔ α را فاصلهٔ سمت‌الرأسی ماه در نقطهٔ A گویند). به‌همین ترتیب، زاویهٔ β را در B اندازه می‌گیرند. اگر O مرکز زمین باشد، $\hat{ALO}=p$ و $\hat{BLO}=p'$ فرض می‌کنیم، λ اختلاف

ارتفاع دونقطهٔ Aو B است: $p+p'+\lambda=\alpha+\beta$. در نتیجه داریم:

$$\frac{OL}{\sin\alpha}=\frac{OA}{\sin p}=\frac{R}{\sin p} \quad و \quad \frac{OL}{\sin\beta}=\frac{OA}{\sin p'}=\frac{R}{\sin p'}$$



شکل ۴۳

که درآن R شعاع زمین، وهمینطور pو'p، مقادیر معلومی هستند.

$$\sin p=\frac{OA}{OL}=\frac{\sin p}{\sin\alpha}=\frac{\sin p'}{\sin p}$$

که درآن p همان اختلاف منظر است.

این زاویه، بین ۵۴ دقیقه و ۶۱ دقیقه بدست می‌آید و در نتیجه فاصلهٔ زمین ازماه بین ۵۵/۵ تا ۶۶/۱ شعاع کرهٔ زمین خواهد بود.

b) فاصلهٔ زمین تا خورشید ـ درمورد خورشید نمی‌توان مثل‌ماه عمل‌کرد، زیرا زاویهٔ اختلاف منظر خورشید بسیارکوچك است، ازطرف دیگر رصدکردن خورشیدکار مشکلی‌است.

به این مناسبت این اندازه‌گیری‌را به‌کمك سیاره‌ای‌که ازبین زمین وخورشید عبور می‌کند انجام‌می‌دهند. هالی (Halley) از زهره استفاده کرد، زیرا این سیاره خیلی به‌زمین نزدیك می‌شود.

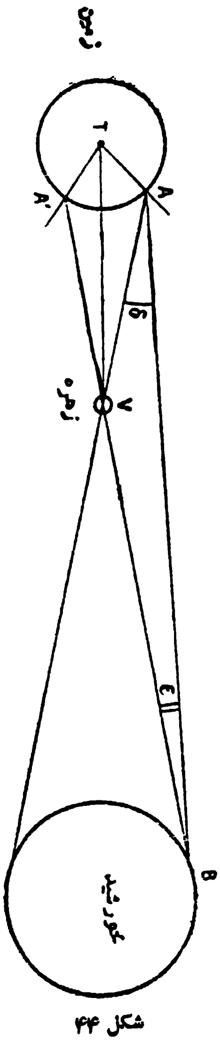
اساس روشی که هالی به کمك زهره به‌کاربرد، چنین است:

فاصله‌های $AT = R$ و $TV = d$ را مـی‌شناسیم، از آنجا AV را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{VB}{VA} = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} \# \frac{\delta}{\varepsilon}$$

(δ و ε زاویه‌هایی کوچك هستند).

اندازه‌گیری دیگری هم در نقطهٔ دیگری مانند A' اززمین انجام‌می‌دهیم (زاویه‌های δ و δ' خیلی کـوچکند و بنابراین، دقت تجربی فوق‌العاده‌ای را لازم دارد). از آنـجا ε، یعنی اختلاف‌منظر خورشید، بدست‌می‌آید.


شکل ۴۴

c) فاصلهٔ زمین ازیك ستاره .ـ دراین مورد هم اختلاف منظر را به‌کار می‌برند، منتهی باید قاعده را بزرگ انتخاب کرد و برای این‌منظور قطر مدار زمین را درنظر می‌گیرند وستاره را درفاصلهٔ زمانی ۶ ماه‌رصد می‌کنند، روش محاسبه شبیه حالتهای قبلی است.

کتابهائی از مترجم این کتاب

I. تاریخ ریاضیات

۱ ریاضیات در شرق
۲. سرگذشت آنالیز ریاضی
۳ تاریخ حساب
۴. لگاریتم (تاریخ استدلالی لگاریتم)
۵. هندسه درگذشته وحال

II. نظریهٔ بازیها در ریاضیات

۶. سرگرمیهای ریاضی
۷. سرگرمیهای جبر
۸. سرگرمیهای هندسه
۹. درپی فیثاغورث
۱۰ اندیشهٔ ریاضی
۱۱ در قلمرو ریاضیات

III. ریاضیات به زبان ساده

۱۲. دستگاههای محدود درریاضیات
۱۳ روش مختصاتی وهندسهٔ چهاربعدی
۱۴ بازی با بینهایت
۱۵. داستانهای ریاضی
۱۶ داستان مجموعه‌ها
۱۷ منحنیها در فضا

IV. ریاضیات را بهتر یاد بگیریم

۱۸ مساله‌های ریاضی، آسان ولی...
۱۹ نامساویها
۲۰ انعکاس
۲۱. ورودی به‌منطق ریاضی
۲۲ اشتباه استدلالهای هندسی
۲۳ نظریهٔ مجموعه‌ها
۲۴ تقارن در هندسه و جبر

V. کمك به‌ریاضیات دبیرستانی

۲۵ مثلثات
۲۶. عددهای اول
۲۷ تقارن در جبر
۲۸ ۲۵۰ مسالهٔ حساب
۲۹ استقراء ریاضی
۳۰ دورهٔ اختصاصی جبر مقدماتی
۳۱. مثلثات (مستقیم الخط و کروی)
۳۲. مسائل مسابقات ریاضی (از کنکورهای شوروی)
۳۳. روشهای جبر ـ دوجلد
۳۴. روشهای مثلثات

VI. ریاضیات بالاتر

۳۵. هندسهٔ غیراقلیدسی
۳۶. نظریهٔ اعداد
۳۷. مسائل‌وتمرینهای آنالیزریاضی

VII. فلسفهٔ ریاضیات

۳۸. ریاضیات (محتوی، روش و اهمیت آن)

VIII. علم واجتماع دردنیای قدیم

۳۹. يك روز زندگی پسرك قبطی

منتشر شده است:

ریاضیات

استقراء ریاضی
سومینسکی گولوینا یاگلوم ـ ترجمه پرویز شهریاری

اشتباه استدلالهای هندسه
یاکوف اسمنویچ دوبنوف ـ ترجمه پرویز شهریاری

اصول خط‌کش محاسبه
م. ه. شفیعیها

انعکاس
ایلیا یاکولویچ باکلمان ـ ترجمه پرویز شهریاری

جبر و مقابله خوارزمی
محمدبن‌موسی خوارزمی ـ ترجمه حسین خدیوجم

حساب استدلالی
محمود مهدی‌زاده، مصطفی رنگچی

۲۵۰ مسالهٔ حساب
واتسلاو سرپینسکی ـ ترجمه پرویز شهریاری

رسم فنی دبیرستانی
امیر منصور صدری، جواد افتخاری

رسم فنی دانشگاهی
س. بوگولیوبف، ا. ونیف ـ ترجمه باقر رجالی‌زاده

روشهای مثلثات

پرویز شهریاری، احمد فیروزنیا

ریاضیات چیست؟

ریچارد کورانت، هربرت رابینز ـ ترجمه حسن صفاری

ریاضیات نوین

سرژ برمان، رنه‌بزار ـ ترجمه احمد بیرشك

سرگرمیهای هندسه

یا. ای. پرلمان ـ ترجمه پرویز شهریاری

فلسفهٔ ریاضی

استیفن س. بارکر ـ ترجمه احمد بیرشك

لگاریتم

گ. ك. استاپو ـ ترجمه پرویز شهریاری

مسائل عمومی ریاضیات

باقرامامی

معادلات دیفرانسیل

محمد جواد افتخاری

نامساویها

پاول پترویچ کاروکین ـ ترجمه پرویز شهریاری

نظریهٔ مجموعه‌ها

واتسلاو سرپینسکی ـ ترجمه پرویز شهریاری

ریاضیات در شرق

پرویز شهریاری

آنالیز ریاضی

غلامحسین مصاحب

پایه‌های آنالیز ریاضی جدید

آ. دوندو ـ ترجمه باقرامامی

تمرینها و مسائل آنالیز ریاضی

ب. ب. دمیدوویچ ـ ترجمه پرویز شهریاری

ریاضیات عالی برای مهندسان و فیزیکدانان

ایوان والیزابت سوکولینکاف ـ ترجمه سیروس فرمانفرمائیان

عدد زبان علم

توبیاس دانتزیک ـ ترجمه عباس گرمان

سرگذشت علم

جورج سارتون ـ ترجمه احمد بیرشك

علم

دکتر محمود بهزاد

خوابگردها

آرتورکوستلر ـ ترجمه منوچهر روحانی

علم در تاریخ

جان دزموندبرنال ـ کامران‌فانی، بهاءالدین‌خرمشاهی ودیگران

تاریخ حساب

رنه‌تاتون ـ ترجمه پرویز شهریاری

ریاضیدانان نامی

اریك تمپل‌بل ـ ترجمه حسن صفاری

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دول‌شه ـ ترجمه پرویز شهریاری

تاریخ صنایع و اختراعات

پی‌یرروسو ـ ترجمه حسن‌صفاری

تاریخ علوم

پی‌یرروسو ـ ترجمه حسن صفاری

تاریخ علم

جورج سارتون ـ ترجمه احمد آرام

چند مسالهٔ مشهور هندسه

علی شرف‌الدین

هندسه در گذشته و حال

پرویز شهریاری

بحثی در قضیهٔ فیثاغورث

ترجمه احمد آرام

عددهای اول

امیل‌بورل ـ ترجمه پرویز شهریاری

تقارن در هندسه و جبر

پرویز شهریاری

روشهای جبر

پرویز شهریاری

نظریهٔ اعداد

پرویز شهریاری، احسان‌الله قوام‌زاده

مثلثات

ربرت‌کامبل ـ ترجمه پرویز شهریاری

دورهٔ اختصاصی جبر مقدماتی

سرگی ایوسیفوویچ نووسلو ـ ترجمه پرویز شهریاری

جدولهای لگاریتم

پرویز شهریاری ـ باقرامامی

تقارن در جبر

ترجمه پرویزشهریاری

در قلمرو ریاضیات

ترجمه‌پرویز شهریاری

مسائل مسابقات ریاضی شوروی

واسیلی سیمینوویچ کوشچنکو ـ ترجمه پرویز شهریاری

مثلثات

مستقیم‌الخط وکروی

اس.ای. نووسلو ـ ترجمه پرویز شهریاری

هفتصد مسالهٔ جبر و مثلثات وحساب

پرویز شهریاری، باقرامامی، محمد جواد حریرچی

سرگرمیهای جبر

یا. ای. پرلمان ـ ترجمه پرویز شهریاری

سرگرمیهای ریاضی

یا. ای. پرلمان ـ ترجمه پرویز شهریاری

درپی فیثاغورث

شه‌پان، النسکی ـ ترجمه پرویزشهریاری

اندیشه ریاضی

ترجمه پرویز شهریاری

تفریحات ریاضی

مارتین گاردنر ـ ترجمه هرمز شهریاری

جادوی اعداد

سیدنی‌لمب ـ ترجمه هوشنگ‌جوزوی

کتابهای سیمرغ

این کتاب به سرمایهٔ مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر به چاپ رسیده است